연세경제연구 제 IX 권 제 1 호
Yonsei Economic Studies, Vol. IX, No. 1 (March 2002)

힉스에서 로스까지
— 현대금융이론 문헌정리 —

김 학 은

I. 머 리 말

1. 본 논문은 현대금융이론을 문헌 정리한 것이다. 그 목적은 두 가지이다. 첫째 목적은 하나의 개념을 중심으로 현대금융이론을 통합 정리하고자 하는 것이다. 둘째 목적은 독자가 추상적인 내용을 쉽게 이해할 수 있도록 적절한 예를 들기 위함이다. 두 가지 목적을 달성하기 위해서 필자의 설명방식과 함께 필요하다면 기존의 설명방식을 병기한다.

2. 현대금융이론의 주요 내용에 파생상품가격결정(option pricing), 자본자산가격결정모형(capital asset pricing model), 재정가격결정이론(arbitrage pricing theory), 모딜리아니-밀러 정리(Modigliani-Miller Theorem)가 있다. 이들은 모두 자산가격결정론이다. 가격론(price theory)이므로 균형 개념으로 통합할 수 있는데 금융이론에서 균형은 재정(no arbitrage) 개념과 일치한다. 일반적으로 경제학

본 논문은 2002년 4월에 연세대학교 상경대학 경제학과 부설 금융리스크관리에서 강의한 내용을 정리한 것이다.
연세대학교 상경대학 경제학과, 서울특별시 서대문구 신촌동 134, 120-749.

에서 가격론은 균형론이다. 균형에서 가격이 결정될 때 1물1가의 법칙이 성립한다. 불균형하에서 1물1가의 법칙이 깨지면 추가적인 비용을 발생하지 않고도 가격 차이를 이용하여 이득을 취할 수 있는 기회가 생긴다. 금융에서도 1물1가의 법칙이 깨지면 추가적인 비용이 들지 않더라도 가격 차이를 이용하여 이득을 얻을 수 있는데, 이 때 추가적인 비용이란 추가적인 위험을 가리킨다. 여기서 재정의 개념이 도출된다. 추가적인 위험을 감수하지 않고 추가적인 수익을 기대할 수 있는 기회를 가리킨다. 재정개념의 가장 완벽한 모습은 파생상품 가격결정에서 보여주기 때문에 파생상품에서 시작한다.

Ⅱ. 파생상품의 가격결정이론

3. 파생상품(derivative)의 특징은 첫째, 미래 상태에 대한 조건부(contingent) 계약이라는 점이다. 둘째, 파생상품에는 선물(선도), 옵션, 스왑이 있는데 옵션은 선물(선도)의 일반적인 형태이고 스왑은 옵션과 선물의 합성이다. 따라서 옵션이 파생상품에서 중요한 자리를 차지한다. 셋째, 원상품(underlying asset)에서 파생되어 나왔다는 점이다. 원상품도 미래에 조건부 계약이기는 마찬가지이다. 미래 상태에 대한 조건부 계약이므로 위험이 따르지 않을 수 없다. 그러므로 파생상품은 태생적으로 원상품의 위험을 그대로 간직하지만 어떠한 조건하에서 파생상품은 원상품에 수반하는 위험을 분산하는 기능을 한다는 점에서 다르다.

4. 금융이 발달되지 않은 때에 소득을 얻기 위해서는 소득의 원천이 되는 무언가를 시간을 들여 축적하는 방법밖에 없었다. 자본축적은 이래서 필요하였다. 노동의 축적을 위해서 교육이 필요하였다. 즉, 과거의 축적으로부터 소득이 발생한다. 과거의 특징은 이미 지나간 세월이기 때문에 '확실'하다는 것이다. 과거에 축적한 것이 많은 사람은 소득도 크고 그렇지 못한 사람은 가난할 수밖에 없다. '확실성의 세계'이다. 확실성의 세계는 소유권이 확실하다.

이와 달리 금융은 미래의 상태를 하나의 상품으로 보고 미래로부터 소득을

창출하는 행위이다. 미래 시점에서 누군가에 의해 발견되기를 기다리는 무주공산들이 많다. 먼저 차지하는 사람이 소유자가 된다. 과거와 달리 소유권이 확실하지 않다. 발명과 발견은 모두 여기에 속한다. 그러나 '불확실'하다. 그러므로 발견과 발명으로 막대한 수익을 기대하면서 그에 따르는 불확실성 때문에 위험이 도사리고 있다. '수익과 위험'. 이것이 금융의 특징이다. 미래 시점에 무주공산으로 주인을 기다리는 수많은 수익에 대한 도전에서 위험을 어떻게 대처하느냐는 문제를 해결하려고 하는 노력이 바로 파생상품을 창조시켰다. 여기서 위험에 대한 개념을 구분해야 한다.

위험의 종류에는 여러 가지가 있지만 보통 세 가지를 들 수 있다. danger, risk, hazard이다. 이 가운데 risk만이 관리할 수 있는 위험이므로 제거할 수 있다.[1] 파생상품 가운데 옵션은 수익과 위험이 함께 존재하는 현실세계에서 위험을 제거하고 수익만 남기는 상품이다. 위험을 제거하고 수익만 남은 세계는 위험중립의 세계이다. 콜옵션은 정해진 미래 시점에서 정해진 가격으로 정해진 상품을 살 수 있는 권리이다. 풋옵션은 정해진 미래 시점에서 정해진 가격으로 정해진 상품을 팔 수 있는 권리이다. 옵션 자체가 하나의 상품인데 정해진 상품에서 파생되어 나왔으므로 파생상품이다.

파생상품은 위험을 분산하는 것이 목적이지만 잘못 사용하여 파국을 낳기도 하였다. 캘리포니아 주 오렌지 군(Orange County)의 파산, 베링(Barring)회사의 파산, 장기자본회사(Long Term Capital Management)의 파산은 모두 파생상품의 덕도 보았지만 잘못 다루어 망한 예이다.

5. 미래에 일어날지 모르는 상태에 대한 조건부 계약은 인류의 역사만큼 그 역사가 길다. 토지매매 계약서가 기원전 2800년경에 이미 있었고, 기원전 1800년경에 함무라비 법전은 신용거래의 조건을 규정하고 있었다.[2] 농작물은 자연재해에 크게 달렸는데 이럴 경우 토지담보 대출에 대한 이자를 면제해 주었다. 재해에 대한 암묵적 조건부 계약인 셈이다. 17세기 네덜란드에 튤립광란을 몰고 온 튤립뿌리에 대한 선물계약은 가장 유명한 사건이 되었다. 우리 나라에서 입도선

---

1) Webster Synonym Dictionary.

2) Ingersoll [10].

매도 여기에 속한다. 아파트 열기를 틈탄 입주권은 원시적인 옵션에 속한다.

이처럼 옵션은 이미 오래 전부터 있어 왔지만 보편적으로 중요하게 된 것은 최근이다. 1973년 시카고 거래소는 최초로 시카고 옵션거래소를 개장하여 상장주식에 대한 콜옵션에 대한 공식적인 시장을 마련하였다. 아메리칸 주식시장과 파시픽 주식시장도 곧 뒤를 따랐다. 1977년에는 풋옵션이 시작되었다. 1980년까지 400개의 상장주식에 대해 콜과 풋이 거래되었고 재무증권, 외환, 선물에 대해서도 옵션이 거래되었다. 거래주식 수를 보면 옵션 거래량이 뉴욕증권시장 거래액을 넘었다.[3)]

마침 우연히도 같은 1973년에 옵션가격 결정에 대한 이론이 물리학자 Black과 경제학자 Scholes에 의해 발표되었다. 같은 해에 경제학자 Merton도 동일한 공식을 발표하였다. 이 업적으로 Scholes와 Merton은 노벨상을 받았다. Black은 아쉽게도 노벨상 받기 수년 전에 죽었다. 이들은 모두 경제학자 Samuelson 교수의 제자로서 스승이 1965년에 발표한 옵션의 특별한 형태인 신주인수권(warrant)가격 모형을 발전시킨 것이다. Samuelson 교수는 이미 30년 전에 노벨상을 받았다.

그러나 옵션가격 모형의 역사는 Samuelson 교수 훨씬 이전인 1877년으로 거슬러 올라간다. 이 해에 Castelli가 *Theory of Options in Stocks and Shares*라는 책을 썼다. 1900년에 프랑스의 수학자 Bachelier는 *Theorie de la Speculation*라는 논문으로 박사학위를 받았다. 그가 발견한 투기의 원리는 브라운 운동(Brownian motion) 방정식이라고 알려진 확률미분방정식(stochastic differential equation)이었다. 이 발견은 Einstein보다 5년 앞섰다.

Brown은 스코틀랜드의 식물학자인데 1827년 물 위에 떠 있는 꽃가루가 끊임없이 불규칙적으로 움직이는 이상한 현상을 발견하였다.[4)] "그 운동은 나를 만족시킬 만 하였다. … 그 운동은 액체의 흐름이나 증발 때문에 생기는 것이 아니라 꽃가루 자체가 고유하게 가진 운동이다."라고 적고 있다. "1888년 Georges Gouy는 꽃가루 입자가 빠르게 움직이는 액체 분자와 충돌함으로써 운동하게 된다는 설명을 제시하였다. 브라운 운동은 우리에게 거시세계와 미시세계의 경

---

3) Chriss [7].

4) Moore [15], 전대호 옮김 [15] p. 96.

계에서 일어나는 사건을 직접적으로 보여준다. 끊임없는 브라운 운동은 열역학 제1법칙과 모순되지 않는다. 왜냐하면 입자를 움직이게 하는 에너지는 그 입자를 둘러싼 분자들의 에너지이기 때문이다. 임의의 작은 영역에서 미시적인 입자가 운동 에너지를 얻는다면 분명 국부적인 온도 강하가 일어날 것이다. 그러므로 브라운 운동은 열역학 제2법칙이 통계적인 상수값을 유지하는 것이 아니라 평균적인 평형값 근처에서 요동친다. 1905년에서 1906년 사이에 스몰루코프스키와 Einstein은 각기 독자적으로 브라운 운동에 관한 수학적 이론을 만들어 냈다. Einstein은 빛의 입자가 대기중의 입자와 부딪칠 때 빛의 입자의 진행을 설명하는데 이 방정식을 사용하였다."[5)]

Bachelier의 발견은 당대의 대수학자 Poincare에 의해 그다지 크게 인정받지 못하였다. Bachelier는 불운한 가운데 일생을 마쳤고 아무도 관심을 갖지 않은 채 잊혀졌다.[6)] Bachelier의 발견을 모르는 채 1956년에 Kruizenga는 그의 방정식을 재발견되었다. 1962년에 Boness가 *A Theory and Measurement of Stock Option Value*로 박사학위를 받았다. 1964년 Osborne 역시 Bachelier를 모르는 상태에서 주식가격을 설명하는데 브라운 운동 방정식을 사용할 것을 제의하였다. Kassouf는 1969년에 콜옵션가격 방정식을 발표하였다.

1960년대에 많은 방정식들이 쏟아져 나왔다. 이들 방정식의 공통점은 다음의 브라운 운동 방정식을 사용한다는 점이다.

$$dx_t = \mu_t dt + \sigma_t \varepsilon \sqrt{dt} \tag{1}$$

그러나 이들의 결과는 모두 불완전하였다. 그 이유는 옵션가격이 위험중립의 세계가 아니라 현실 세계에서 결정되는 것으로 표현하였기 때문이다. 그 결과 1973년 Black-Scholes-Merton의 방정식이 나오기 전에는 옵션가격을 결정하는 것이 매우 어려웠다. 그러나 1973년 이후에는 실무자들은 조그만 계산기로 Black-Scholes 공식에 따라 쉽게 계산할 수 있게 되었다. Black-Scholes의 업적은 공식을 성공적으로 유도하였다는 점보다는 위험중립의 세계를 발견했다는

---

5) Moore [15], 전대호 옮김 [15] p. 96.

6) Ingersoll [10].

점이다. 즉, 파생상품이 위험 중립 세계의 상품으로 고안된 사실을 발견하였다는 점이다.

6. 옵션은 일상적인 현상이다. 하나의 예를 들어 보자. 옵션이 바로 도박의 원리에서 비롯되었다고 주장할 수 있다. 천재 수학자 Pascal은 현대 통계학의 개척자이다. 그는 도박을 즐기고 여기에서 통계학의 근본원리를 찾아내었다. Pascal에게 확률에 관심을 갖게 한 사람은 파리의 도박사 Antonie Gombaud이다. 그는 주사위를 던져 특정한 점수에 도달하는 사람이 판돈을 따는 도박에 대하여 Pascal에게 문제를 제기하였다. Pascal은 이 문제를 해결하기 위하여 페르마의 마지막 정리로 유명한 Pierre de Fermat와 의논하였다.[7] 금세기 최대 경제학자 Keynes 역시 확률이 지배하는 보험회사 사장으로도 명성을 날렸고 *A Treatise on Probability*이라는 불멸의 책을 썼다.

카지노를 생각해 보자.[8] 동전을 차례로 3개 던져서 모두 앞면이 나오면 100만 원을 따는 노름을 만들었다고 하자. 가능한 결과는 앞앞앞, 앞앞뒤, 앞뒤앞, 앞뒤뒤, 뒤뒤뒤, 뒤뒤앞, 뒤앞뒤, 뒤앞앞이므로 앞앞앞이 나올 확률은 8분의 1이다. 따라서 판돈은 100만 원의 8분의 1인 12만 5,000원이다. 문제는 카지노가 아무 대책이 없는 가운데 3개가 차례대로 모두 앞면이 나오면 카지노는 부도난다는 데 있다. 카지노가 요행을 믿고 아무 준비 없이 강행할 경우이다.

그러나 다음과 같은 장치를 할 수 있다. 처음 동전을 던지기 전에 노름꾼 A로부터 앞면을 팔고 12만 5,000원을 받았다. 그런 후에 다른 노름꾼 B에게 뒷면을 파는 반대계약을 한다. 첫 번 동전의 뒷면이 나오는 것에 대하여 12만 5,000원을 거는 것이다. 이렇게 되면 동전을 던지기도 전에 판돈이 25만 원이 되었다. 첫 번 동전을 던졌더니 앞면이 나왔다. 그러면 A가 건 판돈 12만 5,000원에 더하여 카지노가 다른 노름꾼 B에게 이겼으니 12만 5,000원이 추가적으로 생긴 것이다. 모두 25만 원이 되었다. 이제 카지노는 B에게 다시 뒷면을 파는 반대계약으로 25만 원을 제시할 수 있게 되었다. 이것에 대하여 B가 25만 원을

7) Singh [20], 박병철 옮김 [20] pp. 65~66.
8) Chriss [7] pp. 121~126.

걸었다. 두 번째 동전을 던졌더니 또 앞면이 나왔다. B가 이번에도 졌다. 따라서 카지노는 판돈 50만 원을 확보하였다. 마지막 차례가 되었다. 카지노는 B에게 50만 원을 뒷면에 대하여 제시하였고 B가 50만 원을 걸었다. 이제 모두 100만 원이 된 것이다. 다시 동전을 던졌더니 최악의 시나리오대로 앞면이 나왔다. 100만 원을 지불해야만 한다. 그러나 걱정할 필요가 없다. 마지막 동전에 건 50만 원을 추가하니 100만 원이 되었다. 두 가지 교훈. 첫째, 카지노는 돈 한 푼 내지 않고 일을 처리한 동시에(수수료만 챙겼다) 위험도 막았다. 둘째, A가 딴 돈 100만 원은 반대계약을 하는 B 같은 사람 10만 명이 10원씩 걷어 준 셈이다. 다시 말하면 위험을 분산한 것이다. 게임을 거듭할 때마다 판돈이 2배로 오른 이유가 여기에 있었다. 2배로 올릴 때마다 위험에 대해 중립적일 수 있기 때문이다.

7. 다른 예를 보자. 여기 100만 원 짜리 주식을 생각하자. 이 주식을 지금으로부터 1개월 후에 90만 원에 살 수 있는 계약을 생각하자. 이 계약서 한 장을 잘 갖고 있다가 1개월 후에 주식값이 202만 5,000원으로 오르면 112만 5,000원의 이익을 얻는다. 만일 90만 원 이하로 떨어지면 살 수 있는 권리를 포기하면 그만이다. 이 같은 권리를 행사할 수 있는 계약서의 가격은 얼마일까. 값이 올라서 이익 112만 5,000원이라면 계약서 값을 제하고 순이익 100만 원이 되려면 계약서의 값이 12만 5,000원이 되면 된다. 이 계약서가 옵션이다.

또 다른 예를 들어 보자. 어떤 사람이 주식을 100원에 공매(空賣, short selling)하였다. 그는 90퍼센트 확률로 1개월 후에 그 주식 가격이 50원으로 하락하리라 예상한다. 그는 곰(bear)시장을 기대한 것이다. 그러나 그 주식가격이 150원으로 오를 확률은 아직 10퍼센트 남아 있다. 만일 1개월 후에 그 주식의 가격이 예상대로 내려가면 50원 이익을 보고, 예상과 달리 오르면 그는 50원 손해본다. 그 손해를 막기 위하여 1개월 되는 날에 그 주식을 90원에 살 수 있는 권리를 갖는 계약을 할 수 있다. 이 때 90원을 권리를 행사할 수 있는 행사가격이라고 부른다. 그 계약에 의해 권리금이 10원이라고 하자. 말하자면 그는 10원을 지불하고 콜옵션을 산 것이다. 만일 가격이 50원이 되는 경우 그는 90원에 살 수 있는 권리를 포기하고 대신 이보다 더 싼 50원에 그 주식을 사서

돌려주면 50원을 벌게 되는데 여기서 콜옵션가격 10원을 제하면 40원의 순수익을 얻게 된다(이자는 무시함). 만일 가격이 150원으로 되는 경우 그는 콜옵션에 의한 권리를 행사하여 90원에 그 주식을 싸게 사서 돌려주고 10원 이익을 보게 되는데 콜옵션가격으로 지불한 10원을 제하면 0이 된다. 따라서 그는 위험에서 벗어날 수 있다.

8. 앞의 예, 특히 카지노의 경우를 살펴보면 세 가지 특징이 발견된다. 첫째, 자기금융이라는 점이다(self financing). 카지노는 자금을 준비하지 않은 채 도박 그 자체의 과정에서 자금이 조달된다. 둘째, 위험 크기의 변동에 따라 그를 대비하는 자금의 크기도 동일하게 복제된다(replicating). 도박이 진행될수록 위험이 높아지는 경우 자금은 이에 비례하여 준비된다. 셋째, 판돈이 2배로 증가된다. 이것을 도박에서는 마팅게일(martingales)이라고 부르는데 이 현상은 위험에 대하여 중립적인 위치를 형성하려는 자연스러운 현상이므로 위험 중립(risk-neutral) 현상을 마팅게일이라고 부를 수 있다. 위험에 대하여 중립적이라는 말은 어떠한 위험에 대해서도 결과가 변함이 없도록 위험과 상관없이 만든다는 뜻이다. 마팅게일은 Doob에 의해 확률이론에 도입되었다.[9)]

9. 마팅게일 세계는 인공의 세계이다. 자연상태의 세계는 수익과 위험이 혼재되어 있다. 이 혼재 상태에서 어떻게 하면 위험을 제거하고 수익만 남게 하느냐 하는 고안은 흡사 공학의 원리와 같다. 중앙아시아의 타크라마칸 사막지대에 있는 고창(高昌)은 매우 건조하다.[10)] 습기라고는 찾아볼 수 없다. 준비해 간 탄산음료는 깡통을 따자마자 펑하고 날아가 버릴 정도이다. 여행자들은 염천하에서 물을 마시기를 원하지만 여간 힘든 일이 아니다. 시장에서 하미(哈密)참외를 팔고 있지만 손을 대기가 어려울 정도로 매우 뜨겁다. 그런데 안내자는 자꾸 먹어보라고 권한다. 보나마나 속도 뜨거울 텐데 하는 생각에 선뜻 손이 가지 않는다. 마침내 안내원의 성화에 참외 하나를 들어올려 반으로 쪼개어 한

---

9) Karr [11] p. 366.
10) 후지이 [5].

조각 먹었는데 예상 밖으로 시원하기가 아이스크림 같다. 어떻게 짧은 시간에 뜨거움은 사라지고 시원함만 남았는가.

바싹 마른 대기가 주변에 수분을 빼앗아 가버리면 이때 순간적으로 1그램의 물이 1칼로리의 열을 증발시킨다. 참외의 온도를 급강하시키는 것이 바로 이 기화열이다. 여름철 더울 때 주변에 물을 뿌리면 시원해지는 원리와 같고, 냉장고와 냉방장치의 원리도 바로 이 원리이다. 자연상태에서 참외는 뜨거움과 시원함을 함께 지니고 있었다. 그런데 기화열을 이용하면 뜨거움은 사라지고 시원함만 남게 되는 이치이다. 이 이치를 이용하여 만든 것이 순간 냉각음료이다. 깡통 속에 들어 있는 음료는 염천하에서는 뜨겁다. 깡통을 만지면 데일 정도이다. 그러나 그 깡통 속에는 가느다란 대롱이 숨겨져 있다. 깡통을 따는 순간 이 대롱 속에 있던 화학물질이 증발하면서 음료수의 뜨거움을 함께 빼앗아 날아가 버린다. 이것이 아이스박스가 필요 없는 순간냉각음료수이다.

파생상품의 원리도 같다. 금융상품은 수익(시원함)과 위험(뜨거움)이 혼재되어 있다. 여기서 어떻게 위험을 제거하느냐가 순간냉각음료수를 어떻게 만드느냐와 같은 질문이다. 이 상품을 만드는 원리가 공학의 원리와 같으므로 금융공학(financial engineering)이라고 이름할 수 있다. 공학에서 냉장고나 냉방기나 순간냉각음료수의 발명과 같은 것이 금융에서는 파생상품의 발명이다. 공학과 금융이 같은 원리를 이용하므로 금융공학이라는 말이 여기에서 유래되었는지 모른다. 금융공학에서 다루는 주제는 선도(선물), 옵션, 스왑이다. 이 가운데 옵션은 선도(선물)의 일반적인 모습이고, 스왑은 선도(선물)와 옵션으로 분해할 수 있으므로 옵션이 금융공학의 핵심이라고 말할 수 있다.

이상의 비유에서 주의할 사항은 아무리 열을 빼앗아 간다 해도 자연에서 열의 총량이 줄어들지 않듯이 아무리 위험을 제거한다 해도 경제에서 전체 위험이 줄지 않는다는 점이다. 열량 불변의 법칙처럼 위험량 불변의 법칙이다. 다만 참외의 열량이 줄어들지만 주변의 열량이 증가하며 골고루 분산되듯이 하나의 금융상품의 위험이 줄어들지만 주변의 위험은 증가하며 골고루 분산된다. 카지노의 예에서 보았듯이 한 사람이 돈을 따게 될 때 카지노가 부담해야 할 위험은 수많은 사람에게 분산된다.

10. 파생상품 가격의 형성도 이와 동일하다. 이제 파생상품 가격의 결정원리의 가장 간단한 형태를 살펴보자.[11] 유럽형 무배당 콜옵션을 예로 들겠다.[12] 다음 기에 발생할 수 있는 상태가 두 가지라고 하자. 1과 2이다. 예를 들면 쾌청(快靑)과 우천(雨天)이다. 다음 기의 주식(원상품)의 가격을 $S(t+1)$이라고 표기하고 현재의 가격을 $S(t)$라고 표기하자. 이들 사이의 관계를 다음과 같이 규정하자.

$$
\begin{aligned}
S(t+1) &= (1+r_1)S(t) \qquad \text{확률 } \pi \qquad \text{상태 1} \\
& (1+r_2)S(t) \qquad \text{확률 } 1-\pi \qquad \text{상태 2}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

여기서 $r_1 < r_2$ 을 가정한다. 말로 표현하면 상태 1이 발생하여 현재의 가격 $S(t)$가 $(1+r_1)$배만큼 올라서 다음 기의 가격 $S(t+1)$이 될 확률이 π 이고, 상태 2가 발생하여 현재의 가격 $S(t)$가 $(1+r_1)$배보다는 큰 $(1+r_2)$배만큼 올라서 다음 기의 가격 $S(t+1)$이 될 확률은 $1-\pi$ 이다.

개인 투자자에게는 위험을 감수하며 주식에 투자하는 방법과 안전하게 국공채나 저축예금 등에 투자하는 방법이 주어져 있다. 안전하게 국채 $B(t)$에 투자한 결과는 다음 기 $t+1$에 상태 1이나 상태 2가 발생하여도 동일하다. 즉, 위험 중립적이다. 따라서 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
B(t+1) &= (1+r_F)B(t) \qquad \text{상태 1} \\
& (1+r_F)B(t) \qquad \text{상태 2}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

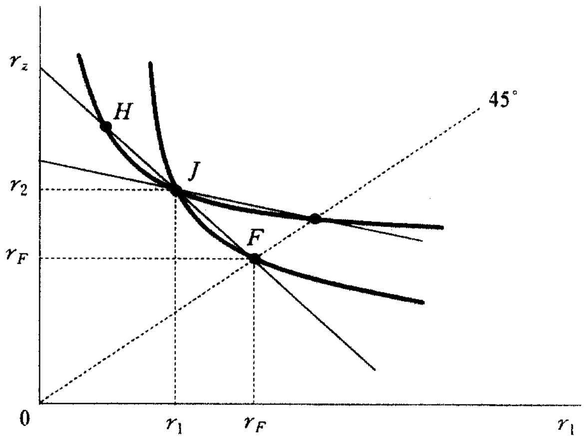
여기서 r_F는 안전한 자산에 투자할 때의 이자율이다. 이렇게 보면 다음이 성립한다.

---

11) Ingersoll [10].

12) 유럽형이라고 하여 유럽에서 거래된다는 뜻이 아니다. 만기에만 행사할 수 있는 옵션을 가리킨다. 여기에 대하여 만기 이전에 어느 때에나 행사할 수 있는 옵션을 아메리카형이라고 부른다. 버뮤다 옵션은 만기 이전에 정해진 때에 행사할 수 있는 옵션을 가리킨다.

〈그림 1〉



$$r_1 < r_F < r_2 \tag{4}$$

만일 이 조건이 지켜지지 않으면 어느 한쪽으로만 투자가 몰리게 된다. 가령 $r_1 < r_2 < r_F$ 이면 아무도 주식에 투자하지 않는다. 어느 상태가 발생해도 주식이 유리하기 때문이다. 반대로 $r_2 > r_1 > r_F$ 이면 어느 상태가 발생하여도 국채는 주식보다 불리하므로 아무도 주식에 투자하지 않는다. 〈그림 1〉은 이들 사이의 관계를 잘 설명하고 있다.

〈그림 1〉에서 수직축은 상태 2가 일어났을 때 기대되는 수익을 측정하고, 수평축은 상태 1이 발생했을 때 기대되는 수익을 나타낸다. 국채의 경우에는 상태에 관계없이 수익이 $(1+r_F)$이므로 수직축의 크기와 수평축의 크기가 동일하여 좌표가 $F=(1+r_F,\ 1+r_F)$이다. 주식의 경우에는 상태 2의 경우가 상태 1의 경우보다 수익이 크므로 좌표 $J=(r_1,\ r_2)$는 국채의 좌표 $(1+r_F,\ 1+r_F)$에서 왼쪽에 위치한다. 2개의 좌표 F와 J를 연결하면 하나의 직선이 된다.

11. 여기에 파생상품을 도입하자. 구체적으로 콜옵션을 생각하자. 콜옵션의 가격은 순전히 원상품인 주식가격과 시간에 달려 있으므로 그의 정의는 다음과 같다.

$$C(S, t+1) = C((1+r_1), t) \quad \text{확률 } \pi \quad \text{상태 } 1$$
$$C((1+r_2)S, t) \quad \text{확률 } 1-\pi \quad \text{상태 } 2 \tag{5}$$

여기서 주목할 사항은 콜옵션 가격이 원상품가격에 달려 있으므로 각각 상태에서 콜옵션 가격이 결정되는 확률이 원상품가격의 경우와 동일하다는 점이다. 즉, 파생상품의 위험은 원상품의 위험과 동일하다. 이것은 카지노 예의 세 가지 특성과 일치한다. 식 (5)를 $C(S, t)$로 나누어주면 파생상품의 수익률이 된다. 즉, 다음과 같다.

$$\frac{C((1+r_1)S, t)}{C(S, t)} \text{ 이거나 } \frac{C((1+r_2)S, t)}{C(S, t)} \tag{6}$$

따라서 파생상품의 수익률의 좌표는 〈그림 1〉에서 $H = \left(\frac{C((1+r_1)S, t)}{C(S, t)}, \frac{C((1+r_2)S, t)}{C(S, t)}\right)$이다. 이 점은 점 J의 왼쪽에 위치한다. 파생상품 가격의 가격변동은 원상품의 변동보다 심하다. 그 이유는 아래 **14**와 **18**에서 제시하겠다.

12. 이제 개인 투자자에게 두 가지 투자 기회가 주어져 있다. 주식에 투자하는 기회와 국채에 투자하는 기회이다. 국채에만 투자하면 위험은 없지만 수익이 낮다. 주식에만 투자하면 수익은 높지만 위험도 높아진다. 따라서 이 두 기회를 혼합해서 일부 β를 주식에 투자하고 나머지 일부인 $1-\beta$를 주식에 투자하여 $\beta(1+r_2)+(1-\beta)(1+r_F)$의 수익률을 기대할 수 있다. 이 수익률은 한계수익 균등의 법칙에 의해 옵션의 투자 수익률과 동일해야 한다. 따라서 상태 2인 경우

$$\frac{C((1+r_2)S, t+1)}{C(S, t)} = \beta(1+r_2)+(1-\beta)(1+r_F) \tag{7}$$

가 성립하고, 상태 1인 경우

$$\frac{C((1+r_1)S, t+1)}{C(S, t)} = \beta(1+r_1) + (1-\beta)(1+r_F) \tag{8}$$

가 성립한다. 식 (7)~(8)에서 β에 대해 서로 대입하면

$$\pi^* C((1+r_1)S, t+1) + (1-\pi^*) C((1+r_2)S, t+1) - (1+r_F)C(S, t) = 0 \tag{9}$$

여기서

$$\pi^* = \frac{r_F - r_2}{r_1 - r_2} \tag{10}$$

이다. 식 (9)는 미분방정식인데 이것을 풀면 콜옵션 가격이 결정된다. 식 (9)의 특징은 진짜 확률 π가 콜옵션 가격 결정에 영향을 미치지 않는다는 점이다. π^*만이 영향을 준다. 이것은 옵션가격이 위험이 배제된 위험중립의 세계에서 결정된다는 것을 뜻한다. 이것은 이자재정을 가정하고 있다는 사실과 일치한다.

13. π^*의 의미를 이해하기 위해서 위의 설명을 Arrow-Debreu의 일반균형에 입각해서 설명할 수 있다. 먼저 국채는 어떠한 상태가 일어나도 수익이 동일하므로 다음이 성립한다.

$$1 = \Phi_1(1+r_F) + \Phi_2(1+r_F) \tag{11}$$

등호의 왼쪽은 현재 국채에 투자한 금액 1원이다. 식 (11)은 이미 이자재정을 가정하고 있다. 이 투자에 대한 수익은 다음 기에 어떤 상태가 일어나도 $1+r_F$가 된다. 등호의 오른쪽의 첫째 항은 상태 1이 벌어졌을 때의 수익이고 둘째 항은 상태 2가 일어났을 때의 수익이다. 여기서 Φ_1과 Φ_2는 각각 상태가격이다. 상태가격의 정체를 이해하려면 식 (11)을 주식에 투자한 경우로 확대

하면 된다.

$$S = \Phi_1(1+r_1)S + \Phi_2(1+r_2)S \tag{12}$$

상태가격 Φ_1은 상태 1이 발생하면 1개의 수익을 약속하고, 상태 2가 발생하면 아무 것도 주지 않는 보험상품의 가격이다. 즉, 보험상품은 조건부 상품이다. 따라서 상태 1이 발생하면 $(1+r_1)S$의 수익을 약속하는 경우 보험금은 $\Phi_1(1+r_1)S$이다. 상태가격 Φ_2도 마찬가지로 해석할 수 있다. 이렇게 보면 주식 S는 2개의 조건부 상품이 합쳐진 합성상품(composite good 또는 complex security)이라고 해석할 수 있다. 식 (12)에서 등호의 왼쪽은 현재 주식에 투자한 금액 S원이다. 등호의 오른쪽의 첫 항은 이 투자가 다음 기에 상태 1이 일어나면 $(1+r_1)S$가 되는 것을 나타내고, 둘째 항은 상태 2가 일어날 때 $(1+r_2)S$가 되는 것을 나타낸다. 상태 1일 때 상태가격 Φ_1을 수익 $(1+r_1)S$에 곱해 주면 이것은 일종의 상태 1이 일어날 확률(정확히 확률은 아니다)에 수익을 곱해 준 것과 유사하다. 마찬가지로 상태 2일 때 상태가격 Φ_2를 $(1+r_2)S$에 곱해 주면 이것 역시 일종의 상태 2가 일어날 확률(정확히 확률은 아니다)에 수익을 곱해 준 것과 유사하다. 그러므로 등호의 오른쪽은 다음 기에 일어날 가능성을 모두 고려하여 각 상태에서 기대하는 수익의 평균에 흡사하다. 어떠한 경우가 발생하여도 기대되는 수익이다. 이것이 오늘 투자한 금액과 같아야 한다. 식 (12) 역시 이미 이자재정을 가정하고 있다.

상태가격을 더 깊이 이해하기 위하여 식 (7)을 조사하면 상태가격의 합인 $\Phi_1 + \Phi_2 < 1$가 됨을 발견하게 된다. 이것은 상태가격이 곧 확률이 아님을 알 수 있다. 그 대신 여기에 $1+r_F$를 곱한 식 (10)이 확률의 합인 1이 되므로 식 (11)의 두 항을 각 상태가 일어날 수 있는 확률이라고 생각할 수 있다. 따라서

$$\pi^* = (1+r_F)\Phi_1 \tag{13}$$

$$1 - \pi^* = (1+r_F)\Phi_2 \tag{14}$$

이다. 식 (13)~(14)가 식 (10)과 동일하여 확률이 되는 이유는 다음과 같다. 식 (11)~(12)를 풀어 보면

$$\Phi_1 = \frac{r_F - r_2}{(1+r_F)(r_1 - r_2)} \tag{15}$$

$$\Phi_2 = \frac{r_1 - r_F}{(1+r_F)(r_1 - r_2)} \tag{16}$$

가 성립하는데 이 결과가 바로 식 (13)~(14)이다. 그러나 이 확률 π^*는 식 (2)의 진짜 확률 π와 다르다. 확률 π^*는 상태가격을 무위험수익률로 할증한 것으로 위험중립의 세계에서 상태 1이 발생할 위험중립의 확률이다. 즉, 인위적인 확률이다. 위험중립하에서 상태 1이 발생하기를 희망하는 확률이다. 이런 점에서 마팅게일 확률이다. 그러므로 식 (13)~(14)의 확률은 진짜 확률과 다른 확률로서 위험중립적 확률(마팅게일 확률)이다. 따라서 상태가격은 마팅게일 확률을 이자율로 나누어 준 것, 즉 마팅게일 확률의 현재가치와 동일하다. 위험중립적 확률 π^*는 다음과 같이 설명할 수 있다. 식 (12)의 양변에 $(1+r_F)$를 곱해 주면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned}(1+r_F)S &= (1+r_F)\Phi_1(1+r_1)S + (1+r_F)\Phi_2(1+r_2)S \\ &= \pi^*(1+r_1)S + (1-\pi^*)(1+r_2)S \qquad (17)\end{aligned}$$

등호의 왼쪽은 현재의 주식을 안전하게 (위험중립적) 투자할 때 다음 기에 확실하게 얻을 수 있는 결과이다. 그런데 정의에 의해서 실제 세계의 위험한 상태에서는

$$\begin{aligned}E[S(t+1)] &= \pi S_1(t+1) + (1-\pi)S_2(t+1) \\ &= \pi(1+r_1)S + (1-\pi)(1+r_2)S \qquad (18)\end{aligned}$$

이다. 식 (17)의 왼쪽은 위험중립적일 때 식 (18) 등호의 왼쪽과 일치한다. 위험중립적일 때 실제확률 π는 위험중립확률 π^*로 바뀌므로 이에 준하여 다음기의 소득을 $E^*[S(t+1)]$로 표기하면 $E[S(t+1)] = E^*[S(t+1)] = (1+r_F)S$과 일치한다. 따라서 위험중립의 세계에서는

$$\begin{aligned}(1+r_F)S &= E^*[S(t+1)] \\ &= (1+r_F)\Phi_1(1+r_1)S + (1+r_F)\Phi_2(1+r_2)S \qquad (19)\end{aligned}$$

이다. 다음 기의 마팅게일(위험중립) 기대소득은 각 상태의 기대소득의 가중평균이 되므로 식 (19)는

$$\begin{aligned}E^*[S(t+1)] &= (1+r_F)\Phi_1(1+r_1)S + (1+r_F)\Phi_2(1+r_2)S \\ &= \pi^*(1+r_1)S + (1-\pi^*)(1+r_2)S \qquad (20)\end{aligned}$$

가 된다. 따라서 식 (13)~(14)가 성립하며 그 결과 식 (19)는

$$(1+r_F) = \pi^*(1+r_1) + (1-\pi^*)(1+r_2) \qquad (19')$$

가 된다. 한편, 식 (9)는

$$\begin{aligned}(1+r_F) = \pi^* & \frac{C((1+r_1)S,\ t+1)}{C(S,t)} \\ & + (1-\pi^*)\frac{C((1+r_2)S,\ t+1)}{C(S,\ t)} \qquad (9')\end{aligned}$$

이다. (9′)과 (19′)은 마팅게일하에서 세 상품의 이자율이 모두 같아지는 조건이다. 마팅게일하에서 이자율 등가의 원리이다. 즉, 이자재정(no arbitrage)의 원리이다.

14. 이제 점 H가 점 J의 왼쪽에 위치하는 이유를 설명할 차례이다.[13] 점 J에서 식 (18)이 성립하는데 이것은

$$Er_J = \pi r_1 + (1-\pi) r_2 \tag{21}$$

를 의미한다. 점 F에서는 식 (19)가 성립하는데 이것은

$$r_F = \pi^* r_1 + (1-\pi^*) r_2 \tag{22}$$

를 의미한다. 식 (21)에서 $\pi r_1 = aEr_J$와 $(1-\pi) r_2 = (1-a)Er_J$를 만족시키는 가중치 a가 존재하므로 식 (21)에서

$$\frac{1}{Er_J} = \frac{a}{r_1} + \frac{1-a}{r_2} \tag{23}$$

가 성립한다. 마찬가지 방법으로 식 (22)에서 $\pi^* r_1 = a^* r_F$와 $(1-\pi^*) r_2 = (1-a^*) r_F$를 만족시키는 가중치 a^*가 존재한다. 따라서

$$\frac{1}{r_F} = \frac{a^*}{r_1} + \frac{1-a^*}{r_2} \tag{24}$$

가 성립한다. 4개의 식 (21)~(24)는 서로 독립이고 모두 점 J에서 만난다. 그 가운데 식 (23)은 점 J 이외에 45도선과 점 G에서 만나고 점 H와 만난다. 따라서 점 H는 반드시 점 J의 왼쪽에 위치한다.

15. 지금까지 논의를 종합하자. 식 (12)에서

$$r_2 = \frac{1-\Phi_1-\Phi_2}{\Phi_2} - \frac{\Phi_1}{\Phi_2} r_1 \tag{25}$$

---

13) 김학은 [2].

이 성립한다. 이것은 〈그림 1〉에서 직선 FJH의 식이다. 이 직선의 기울기는

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\pi^*}{1-\pi^*} \tag{26}$$

이다. 등호가 성립하는 이유는 식 (13)~(14) 때문이다. 〈그림 1〉에서 직선 FGH상의 모든 점은 두 점 F와 J에 의해서 만들어질 수 있다. 수학적으로 말하면 모든 점을 두 점 F와 J의 일차선형으로 정의할 수 있다. 이것은 위험자산인 S와 무위험자산인 B만으로 모든 위험자산을 정의할 수 있다는 말이다. 즉, 임의의 자산 S'은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$S' = (1-\alpha)B + \alpha S \tag{27}$$

S'은 임의의 자산이므로 점 H도 해당한다. 그러므로 옵션은 첫째, 국채와 주식으로 설명할 수 있고, 둘째, 잔여자산이다.

16. 첫째 특성에 대하여 먼저 살펴본다. 여기서 국채의 가격은 불확실성이 배제된 확정적 가격이다. 그러므로 이것은 확률변수가 아니다. 확정적인 국채가격 대신 다른 확정적인 가격으로 대체해도 상관없다. 그것이 행사가격 K이다. 그러므로 만기 T에 가면 콜옵션의 가격은

$$C_T = \max[S_T - K,\ 0] \tag{28}$$

이 된다. 만일 만기의 주식가격이 행사가격보다 크면 그 차이가 옵션가격이 되고 만일 만기의 주식가격이 행사가격보다 작아지면 행사를 포기하므로 옵션가격은 0이 된다. 그러나 만기 이전의 시기에는 콜옵션 가격을 알기 위해서 잠시 다음을 생각하자.

점 H는 점 J의 왼쪽에 위치한다. 이것은 파생상품의 가격변동은 원상품의 가격변동보다 더 심하다는 현상을 보여준다. 그 이유는 앞서 14의 설명과 같다.

식 (9)는 식 (13)~(14)의 도움으로

$$C(S,t) = \Phi_1 C((1+r_1)S, t+1) + \Phi_2 C((1+r_2)S, t+1) \tag{29}$$

이 된다. 이 결과를 식 (12)와 비교하면 파생상품의 가격변동이 더 심하게 됨을 알 수 있다. 또 한 가지 특성은 파생상품의 가격결정 원리를 나타내는 방정식 (9)는 투자자의 선호와는 무관하다는 점이다. 그 까닭은 마팅게일의 특성 때문이다. 모든 투자자들이 위험 중립을 택하는 확률은 동일하기 때문이다. 즉, 식 (19′)에서

$$1+r_F = \pi^*(1+r_1) + (1-\pi^*)(1+r_2) \tag{30}$$

가 성립하는데 이것이 마팅게일이다. 따라서 식 (9)의 풀이는

$$\begin{aligned} C(S,t) &= \frac{1}{1+r_F}[\pi^* C((1+r_1)S, t+1) + (1-\pi^*)C((1+r_2)S, t+1)] \\ &= \frac{1}{1+r_F} E^*[C(S(t+1), t)] \end{aligned}$$

가 된다. 여기서 E^*는 마팅게일 기대치를 가리킨다. 오른쪽 항의 괄호 속의 크기를 만기까지 계속 대입하면

$$\begin{aligned} C(S,t) &= \frac{1}{(1+r_F)^{T-t}} E^*[\max(S_T - K, 0)] \\ &= \frac{1}{(1+r_F)^{T-t}} \Sigma(\pi^*)^j(1-\pi^*)^{T-t-j} \\ &\quad (S(1+r_1)^j(1+r_2)^{T-t-j} - K) \end{aligned} \tag{31}$$

이다. 식 (31)은 콜옵션 가격의 결정이 마팅게일 확률에 달려 있음을 보여주는데 이것은 옵션가격결정이 위험중립의 세계에서 이루어짐을 시사한다. 이항분포가 정규분포에 수렴하므로 식 (31)은 마침내 Black-Scholes의 공식

$$C_t = N_1 S_t - N_2 K e^{-r_F(T-t)} \tag{32}$$

와 일치하게 된다. 그 과정에 마팅게일 확률이 포함되어 있으므로 Black-Scholes 공식도 마팅게일이다. 행사가격은 만기의 가치이므로 만기 이전의 시기 t에서는 이자를 제외한 현재가치로 환산해야 하므로 $e^{-r_F(T-t)}$가 붙었다. Black-Scholes는 가중치 N_1과 N_2를 구하는 공식이다. 이 가중치는 만기 이전의 시기 t에서는 $1 > N_1 > N_2 > 0$이다. 이들은 누적표준정규분포 함수인데 그 정의는 다음과 같다.

$$N_1 = N_1(Z_1) \tag{33}$$

$$N_2 = N_2(Z_2) \tag{34}$$

$$Z_1 = \frac{\ln\frac{S_t}{K} + \left(r_F + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{35}$$

$$Z_2 = \frac{\ln\frac{S_t}{K} + \left(r_F - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{36}$$

17. 식 (35)~(36)은 직관적으로 설명할 수 있다.[14] 먼저 원상품의 가격 S의 수익률의 순간평균은 μ이다. 따라서 잔여만기 $T-t$ 동안의 평균수익률은 $\mu(T-t)$이다. 이것은 잔여만기 동안 매기 일정하게 μ 퍼센트 성장한다는 뜻이다. 그러나 일정 시점에서 원상품의 가격은 $+\sigma^2$만큼 오를 수도 있고 $-\sigma^2$만큼 내려갈 수도 있다. 따라서 평균적으로 $\sigma^2/2$만큼 변할 수 있다. 변하는 방향이 내려갈지 올라갈지 모른다. 첫째, 평균이 $\sigma^2/2$만큼 오르는 경우에는 장기적으로 볼 때 잔여만기 동안 S는 평균 $\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$만큼 오른다. 그러나 마팅게일 세계에서는 μ 대신 r_F를 대체하므로 평균은 $\left(r_F + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$가 된다. 이에 대하여 순간분산이 σ^2이므로 잔여만기 동

14) Chriss [7].

안 분산은 $\sigma^2(T-t)$이다. 한편 만기의 원상품의 가격과 현재의 원상품의 가격비는 $\frac{S_T}{S_t}$ 이므로 수익률의 비율은 $\ln\frac{S_T}{S_t}$ 이다. 이것은 확률변수인데 표준확률변수로 전환하면

$$\frac{\ln\frac{S_T}{S_t}-\left(r_F+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{37}$$

가 된다. 만기에서 $S_T \geq K$가 되기 위한 조건은

$$\frac{\ln\frac{S_T}{S_t}-\left(r_F+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \geq \frac{\ln\frac{K}{S_t}-\left(r_F+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{38}$$

이다. 따라서

$$\frac{\ln\frac{S_t}{S_T}+\left(r_F+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \leq \frac{\ln\frac{S_t}{K}+\left(r_F+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{39}$$

이 성립한다. 이것은 S_T가 K보다 클 누적확률

$$\Pr(S_T \geq K) = N_2\left[\frac{\ln\frac{S_t}{K}+\left(r_F+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] \tag{40}$$

을 의미하는데 식 (33)과 식 (35)가 바로 이 관계이다. 둘째, 평균이 $\sigma^2/2$만큼 내리는 경우에는 장기적으로 볼 때 잔여만기 동안 S는 평균 $\left(r_F-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$만큼 오르므로 마찬가지 방법으로

$$\Pr(S_T \geq K) = N_1 \left[\frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r_F - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right] \tag{41}$$

을 얻는다. 이것은 식 (35)와 식 (36)의 내용이다.

18. 앞에서 직관적으로 통계학에 의존하여 설명하였지만 수학적으로 공식 (32)는 다음의 확률미분방정식의 풀이이다.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + r_F S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{\partial C_t}{\partial S_t} - r_F C_t = 0 \tag{42}$$

마지막으로 이 미분방정식 (42)는 브라운 운동 방정식

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, \varepsilon \sqrt{dt} \tag{43}$$

에 이토 정리(Ito's lemma)를 적용한 풀이이다. 이 과정을 살펴보자. 식 (43)에서 ε은 평균이 영이고 분산이 1인 확률변수이다. 따라서 $\frac{dS_t}{S_t}$의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] = \mu\, dt, \qquad V\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] = \sigma^2 dt$$

한편, $\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)^2$의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)^2 = \sigma^2 dt, \qquad V\left[\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)^2\right] = 0 \tag{44}$$

이것이 성립하는 것은 시간 변화의 자승 dt^2은 무시할 정도로 작은 값이므

로 생략할 수 있기 때문이다. 분산이 영이라는 것은 평균과 평균을 구성하는 개별 확률변수의 크기가 모두 동일하다는 것을 뜻한다. 따라서

$$\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)^2 = \sigma^2 dt \tag{45}$$

이다. 한편, 파생상품가격 C_t는 원상품가격 S_t와 시간 t의 함수이므로 이를 테일러 급수로 확장하면

$$dC = C_S dS + C_t dt + \frac{1}{2} C_{SS} dS^2 + \frac{1}{2} C_{tt} dt^2 + \frac{1}{2} C_{St} dS dt \tag{46}$$

이다. 여기서 무릎글자는 편미분을 의미한다. 3차 급수 이상은 생략하였다. 식 (46)에 식 (43)과 (45)를 대입하면

$$dC = C_S dS + C_t dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} dt \tag{47}$$

이 된다. 역시 시간 변화의 자승 dt^2은 무시할 정도로 작은 값이어서 생략하였다. 식 (47)에 식 (45)를 대입하면

$$dC = (C_S \mu S + C_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS})dt + C_S \sigma S \epsilon \sqrt{dt} \tag{48}$$

가 된다. 이것은 형태로 보면 식 (43)과 동일하다. 즉, 식 (48)은

$$dC = \mu_C C dt + \sigma_C C \epsilon \sqrt{dt} \tag{49}$$

가 되기 때문이다. 여기서 $\sigma_C C = \sigma C_S S$이다. 식 (32)에서 $N_1 = C_S$이므로 이 관계는 $(\sigma_C - \sigma)N_1 S = \sigma_C N_2 K e^{-r_F(T-t)}$이다. 따라서 $\sigma < \sigma_C$이다. 이것은 파생상품의 가격변동이 원상품의 가격변동보다 심하다는 뜻이다. 〈그림 1〉

에서 점 H가 반드시 점 J의 왼쪽에 위치한다.

식 (49)에 의해서 원상품가격이 브라운 운동을 하면 파생상품가격도 브라운 운동을 하고 있음이 밝혀졌다. 특히 원상품가격의 불확실성이 그대로 파생상품가격에 반영되고 있다. 이제 콜옵션 상품과 원상품으로 구성된 자산을 다음과 같이 구성한다고 설정한다.

$$P = \omega_1 C + \omega_2 S \tag{50}$$

즉, ω_1단위의 콜옵션과 ω_2단위의 원상품으로 구성되었다. 이로부터

$$dP = \omega_1 dC + \omega_2 dS \tag{51}$$

가 성립한다. 식 (51)에 식 (43)과 식 (49)를 대입하면

$$\begin{aligned} dP &= (\omega_1 \mu_C C + \omega_2 \mu S)dt + (\omega_1 \sigma_C C + \omega_2 \sigma S)\varepsilon\sqrt{dt} \\ &= \mu_P P dt + \sigma_P P \varepsilon \sqrt{dt} \end{aligned} \tag{52}$$

가 된다. 이 식 역시 형태로 보면 식 (43)과 동일하다. 즉, 식 (43), 식 (49), 식 (52)는 모두 동일한 브라운 운동의 형태를 나타내고 있다. 이제 자산구성 (51)에 콜옵션이 포함되어 있고 콜옵션의 목적은 위험을 제거하는 것이므로 식 (52)의 불확실한 부분인 원상품가격의 위험을 배제하는 방향으로 자산을 구성해야 한다. 위험을 제거하는 자산구성의 비율은 $\omega_1 = 1$과 $\omega_2 = -C_S$ 단위인데 이 자산구성은 식 (52)에서 $\sigma_C C = \sigma C_S S$이므로 위험을 나타내는 $\sigma_P = 0$이 된다. 결과적으로

$$dP = C_t dt + \frac{1}{2} C_{SS} \sigma^2 S^2 dt \tag{53}$$

가 된다. 식 (53)에는 위험이 제거되었다. 위험중립의 세계이므로 이 자산구성

대신에 또 하나의 자산구성이 가능하다. 모든 자산 P를 안전자산, 즉 무위험 자산으로 구성하는 방법이다. 즉, 식 (53)에서 $\sigma_P = 0$은 자산구성 P의 수익률이 전혀 위험이 없다는 뜻인데 이 경우 수익률은 무위험 수익률이므로

$$\frac{dP}{dt} = r_F P \tag{54}$$

가 성립한다. 식 (54)와 식 (50)을 식 (53)에 대입하면 식 (42)가 된다. 이 방법이 Black-Scholes가 적용한 방법이다. 확률미분방정식 (42)에 경계조건 $C_T = \max(S_T - K, 0)$을 적용하여 풀면 식 (32)~(36)을 얻는다.

두 방정식 (42)와 (43)을 살펴보면, 첫째, 브라운 운동 방정식 (43)에 등장하는 불확실성 ε은 확률미분방정식 (42)에는 보이지 않고, 둘째, 브라운 운동 방정식 (43)에 등장하는 μ가 확률미분방정식 (42)에는 보이지 않고 대신 무위험 이자율 r_F가 눈에 띈다. 이 두 가지 차이야말로 확률미분방정식 (42)가 마팅게일 세계의 운동 방정식임을 드러낸다. 마팅게일 세계에서는 무위험이자율이 대표하고 불확실성이 제거되기 때문이다. 그러나 이러한 특징에도 불구하고 그 수학적 유도 과정에서 정확성에 대한 의문이 제기되고 있다.[15)]

19. 둘째 특성인 잔여자산의 의미에 대하여 조사한다. 점 H는 반드시 옵션일 필요는 없다. 점 H는 위험자산 점 J와 무위험자산점 F의 가중평균점이므로 위험자산과 무위험자산으로 구성한 어떠한 포트폴리오가 될 수 있다. 이것은 옵션이 자산 선택에 있어서 잔여 자산(redundant)임을 의미한다. 옵션의 등장이 균형에 영향을 미치지 않는다. 이런 면에서 옵션 상품은 균형 중립적이다. 거꾸로 균형은 파생상품 중립적이다. 그러면 파생상품 존재의 의의는 무엇인가. 앞에서 밝혔지만 위험분산이다. 그러나 이 밖에 더 중요한 의의가 있다. 그것은 한 마디로 자산시장을 완전하게 만들어 주는 여러 방법 가운데 하나의 역할을 한다는 것이다.

자산시장이 완전하려면 미래에 일어날 수 있는 상태의 수와 그것을 대비할

---

15) Neftci [17] pp. 280~282.

수 있는 상품의 수가 동일해야 한다. 이 경우에 자산가격이 완전하게 형성될 수 있다. 그러나 현실에서는 미래에 일어날 수 있는 상태의 수보다 자산의 수가 작다. 그 까닭은 우선 미래에 일어날 수 있는 상태가 정확히 무엇인지 사전에 알려져 있지 않으므로 그 수가 몇 개인지 알 수 없다는 점이다. 또 알 수 있다 하여도 모든 경우를 대비하여 준비하는 것이 불가능할 수 있다.

파생상품은 원상품을 토대로 만든 상품이므로 원상품의 수가 상태의 수보다 작으면 원상품의 수를 늘리는 대신 주어진 원상품을 근거로 파생상품을 만들면 된다. 상태의 수와 원상품 수의 차이만큼 옵션상품을 만들어 내면 자산시장은 완전하게 된다. 〈그림 1〉에서 점 H를 형성하는 상품이 없다면 옵션상품이 대신할 수 있다. 자산시장이 불완전하면 균형이 존재하지 않을 수 있다.[16] 이것은 파국을 의미하는데 현실에서는 대폭락을 지칭할 수도 있다. 파생상품의 등장은 균형이 존재하는 경우 균형에 영향을 미치지 않지만 자산이 충분하지 않아서 일어날 수 있는 대폭락을 막아준다. 이것 역시 위험을 피하는 역할이다.

20. Modigliani-Miller (MM)의 정리[17]는 기업금융의 핵심인데 이것 역시 재정의 원리이며 옵션가격이론의 응용문제이다. 하나의 기업이 임의의 기간의 끝에서 청산한다고 생각하자. 그의 청산가치는 x인데 같은 시점에서 부채는 F이다. 이런 경우 주식 (S)소유자의 문제는

$$\max(x-F,\ 0) \tag{55}$$

이다. 주식소유자의 문제는 콜옵션의 보유자의 문제와 흡사하다. 한편, 채권 (B) 소유자의 문제는

$$\min(x,\ F) \tag{56}$$

이다. 마팅게일하에서 기업의 가치 V는

16) 김학은 [1].
17) Ross [18].

$$\begin{aligned} V &= S + B \\ &= E^*[\max(x - F, 0) + \min(x, F)] \\ &= E^*(x) \end{aligned} \tag{57}$$

이다. 결과적으로 기업의 가치는 기업의 부채와 아무 관계가 없다. 이것이 Modigliani-Miller 정리의 첫 번째 정리이다. 이것은 수익률로 표현할 때 잘 드러난다. 자본비용(cost of capital)은

$$\rho = \left(\frac{S}{V}\right)k + \left(\frac{B}{V}\right)r \tag{58}$$

이다. 그러나 이것은 Modigliani-Miller 정리에 의하면

$$k = \rho + \left(\frac{B}{S}\right)(\rho - r) \tag{59}$$

로 표현하여야 한다. 즉, 자본비용 ρ는 기업가치의 구성비율 (B/S)과 관계가 없으며 주식비용 k가 구성비율과 관계가 있다.

21. Modigliani-Miller 정리는 회사인수에도 적용될 수 있다. 어떤 사람이 회사를 인수하는 경우를 생각해 보자. 그가 고려해야 할 사항은 그 회사의 회사가치와 부채이다. 회사의 가치는 자본과 부채의 합이다. 주주들의 목적은 자본과 부채의 차이를 극대화하는 것이고, 채권자는 부채와 자본의 차이를 극소화하는 것이다. 주주는 자본과 부채의 차이가 영보다 크면 자본을 포기하면 되고(유한책임), 채권자는 자본과 부채의 차이가 영보다 작으면 부채의 일부를 포기하고 자본을 택하면 된다. 흡사 콜옵션 소유자가 옵션을 포기하는 것과 같다. 그러므로 인수가격은 대체로 회사의 가치와 부채의 차이에 비례하여 결정되므로 이것은 콜옵션 가격의 결정 원리와 동일하다.

22. 현대 금융이론의 두 가지 접근방법은 확률미분방정식(stochastic differential equation)과 마팅게일(martingale)이다. 그런데 이 두 가지 방법의 공통점은 재정(no arbitrage)이다. 사실 Black-Scholes 역시 재정을 이용하여 공식을 유도하였다. 재정은 하나의 상품에 두 가지 이상의 가격이 형성되면 추가적인 비용을 지불하지 않고도 이익을 실현시킬 수 있는 경우가 없다는 것을 뜻한다. 1물1가의 법칙이다. 파생상품 가격 결정에 재정을 전제하지 않으면 이론적인 가격 설명이 어렵게 된다. 재정은 바로 금융시장이 효율적이라는 가설과 일치한다.

효율적이라는 용어는 두 가지 의미로 사용되었다. 하나는 파레토 효율의 의미이다. 사회 구성원 가운데 아무의 경제지위를 악화시키지 않고 최소 한 사람 이상의 경제지위를 향상시킬 수 없는 상태를 파레토 효율 상태라고 부른다. 다른 사람의 생산을 감소시키지 않고 최소 한 사람 이상의 생산을 증가시킬 수 없는 상태는 생산의 파레토 효율이다. 다른 하나는 금융경제학에서 사용하는 효율이다. 주어진 정보를 모두 사용하여 자산가격을 형성하면 그 자본시장이 효율적이라고 말한다.

두 효율의 개념 사이의 관계는 분명하지 않다. 그러나 금융에서 효율적 시장이 경쟁시장의 파레토 효율이 되는 필요조건이 된다는 것은 짐작할 수 있다. 앞에서 보았듯이 확률미분방정식과 마팅게일이 Arrow-Debreu의 일반균형모형과 일치하는 것도 이러한 이유이다. 경제학적으로 표현하면 금융의 확률미분방정식과 마팅게일은 모두 Arrow-Debreu의 조건부 상품의 일반균형이론과 일치한다. 따라서 만일 자본시장이 효율적이라면, 신고전학파 경제이론이 적용될 수 있음을 뜻한다. 즉, 한계효용균등의 법칙이 적용될 수 있다. 투자 한 단위로부터 기대되는 기대수익은 그 투자의 기회비용과 일치한다는 법칙이다. 그리고 일반균형이론의 균형개념에 재정을 대체할 수 있다. 균형과 재정은 정확하게 일치하지 않는다. 그러나 크게 보아 같은 개념이라고 볼 수 있다.

초기에는 투자의 기회비용을 무위험이자율로만 생각하였으나 효율적 시장 개념이 도입되면서 위험에 대한 프리미엄을 생각하게 되었다. 효율적 시장가설에 의하면 다음이 성립한다.

$$E(1+r_{t+1} \mid I_t) = (1+r_t) \tag{60}$$

시점 t에서 가용할 수 있는 정보 I_t(r_t 포함)를 활용하여 다음 기의 수익률에 대한 예상치(기대값)는 t시점의 수익률과 동일하다는 뜻이다. 이것이 무작위 행보(random walk)의 개념이다. 그런데 이것은 마팅게일의 정의이기도 하다. 이것을 증명해 보자. 우선 수익률을 가격으로 전환하면

$$1 + r_{t+1} = \frac{S_{t+1}}{S_t} \tag{61}$$

이다. 따라서

$$E(S_{t+1} \mid I_t) = (1 + r_t) S_t \tag{62}$$

의 결과는 식 (18)과 일치한다.

Ⅲ. 자산구성이론

23. 파생상품가격결정론은 가격론이다. 이제 파생상품을 낳은 원상품의 가격결정에 대하여 살펴볼 차례이다. 효율적 시장가설의 한 복판에는 마팅게일의 개념이 있다. 마팅게일은 위험중립 행위이다. 따라서 수익과 위험 사이의 관계를 규명할 필요가 생겼다. 이 노력의 계보는 Hicks,[18] Markowitz,[19] Tobin[20]의 자산구성이론(portfolio theory)을 바탕으로 Sharpe,[21] Lintner,[22] Mossin[23]으로 내려오면서 마침내 자본자산가격모형(capital asset pricing model : CAPM)을 발견하고 곧 이어서 Ross[24]가 재정가격이론(arbitrage pricing theory : APT)을 발견하

18) Hicks [8].
19) Markowitz [13].
20) Tobin [21].
21) Sharpe [19].
22) Lintner [12].
23) Mossin [16].

게 되었다. 이 모형들은 신고전학파 경제원리인 한계효용균등의 법칙이 효율적 시장가설과 일치한다는 것을 보여주고 있다. 이것은 재정(arbitrage)의 개념을 이용하면 금융이론을 하나로 통합할 수 있다는 사실을 시사한다. 이미 앞에서 옵션가격결정에 있어서 재정의 중요성은 설명하였으므로 재정을 이용하여 자본자산가격결정과 재정자산가격결정을 설명할 차례이다.

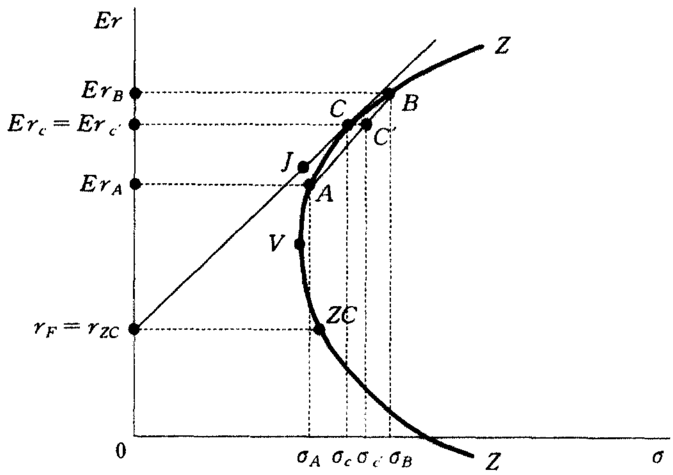
24. Markowitz-Tobin은 Hicks의 직관을 바탕으로 자산구성이론(portfolio theory)으로 만들었다. 그러나 자산구성이론은 자산가격결정이론이기보다 자산구성 내지는 자산선택이론이다. 그 요지는 자산구성의 핵심에는 수익은 위험에 대한 대가라는 원리가 있다는 것이다. 위험이 클수록 수익도 크다. 이 대원리는 Calvin의 기독교 교리, Smith의 전통, Knight의 통합을 잇는 Hicks에 의해 제시되었다.

상품 j 의 수익은 수익률 (r_j)의 평균, 즉 평균수익률 (Er_j)로 측정하고, 위험은 수익률이 평균으로부터 얼마나 괴리를 갖느냐를 나타내는 분산 (σ_j^2) 또는 표준편차(σ_j)로 측정한다. 위험이 커질 때 수익 역시 커진다는 것은 상식이다. 그러나 모든 영역에서 그렇지는 않다. 위험이 커질 때 수익이 낮아지는 영역도 존재한다. 따라서 어느 수익을 중심으로 그보다 큰 수익의 영역에서는 위험이 커질 때 위험이 커지고 그 중심보다 낮은 수익의 영역에서는 위험이 커질 때 수익은 오히려 감소한다. 수익과 위험의 관계는 〈그림 2〉의 곡선 ZZ 처럼 생겼다. 곡선 ZZ 를 포트폴리오 곡선(portfolio frontier)이라고 부른다.

수익과 위험 사이의 이 같은 현상은 직관적으로 다음과 같이 설명할 수 있다. 수익이 시작될 때, 즉 수익이 영에서 시작할 때, 위험은 크다. 비유하여 설명하자면 사업을 시작할 때 성공여부는 불투명하다. 그러나 차츰 수익이 커지면서 위험은 줄어든다. 수익이 점 V 수준에 도달하면 위험은 제일 낮아진다. 그 이후 수익이 커질 때 위험이 다시 커져 가는 것은 관리의 어려움 때문이다. 이것은 생산과 평균비용 사이의 관계와 흡사하다. 생산이 낮은 수준일 때 평균비용은 높다. 생산이 일정한 수준에 도달하면 평균비용이 가장 낮아진다. 그러나

24) Ross [18].

〈그림 2〉



그 이후에는 생산을 증가할 때 평균비용은 다시 오른다.

이러한 현상은 수익과 위험 사이의 관계, 즉 포트폴리오 곡선 ZZ를 수직축에 대하여 볼록하게 만든다. 이것 역시 직관적으로 설명할 수 있다. 〈그림 2〉에서 임의의 두 점 A와 B를 생각하자. 이것은 각각 상품 A와 상표 B를 대표한다. 상품 A는 수익이 Er_A이고 위험이 σ_A이다. 상품 B는 수익이 Er_B이고 위험이 σ_B이다. 두 점을 연결하는 직선 AB를 생각하자. 이 직선상의 임의의 한 점 C'에서 수익률 $Er_{C'}$은 Er_A와 Er_B의 가중평균이 되고 위험 $\sigma_{C'}$은 σ_A와 σ_B의 가중평균이 된다. 즉, 직선 $AC'B$에서

$$Er_{C'} = wEr_A + (1-w)Er_B \tag{63}$$

$$\sigma_{C'} = w\sigma_A + (1-w)\sigma_B \tag{64}$$

가 성립한다. 이번에는 곡선 ACB에서 수익률은 $Er_C = Er_{C'}$이고 위험은 $\sigma_C < \sigma_{C'}$인 점 C를 생각하자. 점 C는 두 상품 A와 B의 수익률 사이에 존재하는 관계를 일반적으로 고려해야 하는데, 두 수익률 사이에 상관관계를 위

험에 반영하면 식 (64)는

$$\sigma_C = \left[w^2 \sigma_A^2 + (1-w)^2 \sigma_B^2 + 2w(1-w)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B\right]^{1/2} \qquad (65)$$

이 된다. 여기서 ρ_{AB}는 r_A와 r_B 사이의 상관계수인데 이것이 1일 때 식 (65)는 식 (64)가 된다. 상관계수는 일반적으로 1보다 크지 않고 -1보다 작지 않다. 따라서 상관계수가 1보다 작고 -1보다 크다면 식 (65)는 식 (64)가 되지 않는다. 식 (65)가 의미하는 바는 수익률은 식 (63)처럼 일차관계이지만 위험은 식 (65)처럼 일차관계가 아니라는 뜻이다. 따라서

$$\begin{aligned}&(w^2 \sigma_A^2 + (1-w)^2 \sigma_B^2 + 2w(1-w)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B)^{1/2} < \\ &w\sigma_A + (1-w)\sigma_B \end{aligned} \qquad (66)$$

이다. 이것은 상품 C의 수익률이 Er_C일 때 그의 위험 σ_C는 점 C'에 있지 않고 이보다 위험이 작은 점 C에 있게 된다는 뜻이다. 따라서 점 A와 점 B를 연결하는 선은 직선 $AC'B$가 아니라 곡선 ACB이다. 수직축에 대하여 볼록하다.

25. 식 (65)의 가중치 w의 범위를 1과 -1 사이에 두면 새로운 상품 C는 곡선 ACB상에 존재한다. 그러나 w의 범위를 $-$무한대에서 $+$무한대로 확대하면 곡선 ACB는 무한대로 확대된다. 즉, 임의의 두 상품 A와 B를 가지고 가능한 모든 상품을 만들 수 있다. 그것이 〈그림 2〉의 곡선 ZZ이다. 이 곡선에서 위험이 증가할 때 수익이 증가하는 점 V 이상의 곡선 부분을 효율곡선이라고 부른다. 점 V 이하의 곡선 부분은 비효율적이다. 곡선의 내부도 비효율적이다. 효율곡선의 왼쪽 영역은 불가능하다.

26. 점 V 이상의 곡선 부분과 점 V 이하의 곡선 부분 사이에는 중요한 관계가 존재한다. V 이상의 곡선 부분의 임의의 한 점은 반드시 이 점의 수익률과 상관계수가 영인 수익률로 대표되는 점을 점 V 이하의 곡선 부분에 갖고

있다. 즉, 점 V 이상의 곡선 부분의 점 C에 대해서 다음의 조건을 만족하는 점 ZC가 점 V 이하의 곡선 부분에 존재한다.

$$COV(r_C,\ r_{ZC}) = E(r_C - Er_c)(r_{ZC} - Er_{ZC}) = 0 \qquad (67)$$

점 ZC의 수평선이 절편과 만나는 점은 r_{ZC}인데 이 점에서 출발하여 효율곡선에 접하는 직선이 효율곡선과 만나는 점 C이다.

27. 투자자들이 정보가 충분하고 합리적이라면 효율곡선상의 한 점을 선택할 것이다. 가령 점 C를 선택한다고 하자. 이 점을 택하면 수익은 Er_C를 기대하고, 이 때 감수하는 최소위험은 σ_C이다. 다시 말하면 수익 Er_C를 기대하면서 위험을 σ_C 이하로 줄일 수 없다. 불가능한 영역이기 때문이다. 효율곡선 ZZ상의 한 점 C의 선택은 투자자의 선호함수에 달려 있다. 점 C의 기대수익률이 Er_C이므로

$$Er_C = w\,Er_A + (1-w)\,Er_B \qquad (68)$$

이다. 즉, 투자자는 자신의 자산을 상품 A와 상품 B를 각각 w와 $1-w$의 비율로 구성한다는 뜻이다. 이제 질문은 동일한 수익 Er_C하에서 위험을 더 줄일 수 있는 방법은 없을까 하는 것이다. 대답은 긍정적이다.

28. 지금까지 논한 상품은 A와 B로 대표되는 위험상품뿐이었다. 즉, 수익을 얻기 위해서는 반드시 위험을 감수할 수밖에 없는 상품이다. 수익이 위험에 대한 보상이기 때문이다. 그러나 무위험 상품이 있다. 하나의 예가 국채이다. 국채는 수익 r_F가 있으면서 위험이 없는 상품이다. 그러므로 〈그림 2〉에서 수직축의 양의 절편인 점 F로 표현할 수 있다. 이제 투자자는 선택의 폭이 넓어졌다. 그는 무위험자산 F만 택하든지 위험자산 C만 택할 수 있다. 그러나 또

하나의 방법이 있다. 무위험자산 F와 위험자산 C를 섞어서 자산구성을 할 수 있다. 자산구성비율을 a와 $1-a$라 하자. 이 경우 기대수익은

$$a\,r_F + (1-a)\,Er_C \tag{69}$$

이 된다. 새로운 자산구성의 수익은 무위험자산수익률 r_F와 위험자산수익률 Er_C의 일차관계이다. 이것은 〈그림 2〉에서 점 F와 점 C를 연결한 직선 FC가 되고 직선을 자산구성비율 a와 $1-a$로 나눈 점 J의 수익률이다. 즉,

$$Er_J = a\,r_F + (1-a)\,Er_C \tag{70}$$

이다. 점 J는 점 C의 왼쪽에 위치한다. 즉, 효율곡선 $ACBV$의 밖에 있다. 그러나 지금은 무위험자산의 존재로 선택 가능한 점이 되었다. 점 F에서 출발하여 효율곡선 $ACBV$에 접하는 직선을 추가한 직선이 효율곡선과 접하는 점 C를 새로 M이라 표기하면 직선 FM이 존재한다. 이 직선을 a와 $1-a$의 비율로 분리하여 새로운 점 J를 구한다. 즉, 무위험자산 F와 위함자산 M을 a와 $1-a$의 비율로 섞어서 구성한 새로운 자산 J의 수익은

$$Er_J = a\,r_F + (1-a)\,Er_M \tag{71}$$

이다. 여기서 Er_M은 점 M의 수익률이다. 새로운 점 J의 위험은 옛날 점 J의 위험보다 낮다. 새로운 점 J의 위험보다 더 낮출 수 없다. 무위험자산은 위험자산만으로 구성한 자산보다 위험을 낮추어 주는 역할을 한다. 이 때 무위험자산 F와 위험자산 M을 a와 $1-a$의 비율로 섞어서 구성한 자산 J의 위험은

$$\sigma_J = (1-a)\,\sigma_M \tag{72}$$

이다. 식 (71)~(72)에서

$$Er_J = r_F + \left(\frac{Er_M - r_F}{\sigma_M}\right)\sigma_J \tag{73}$$

를 얻는다. 이것이 〈그림 2〉에서 직선 FM의 방정식이다. 이 직선을 자본시장선(capital market line: CML)이라고 부른다. 자본시장선은 직선을 포함하여 그 안의 영역에서 투자가 가능하므로 새로운 효율직선이다. 식 (73)에 의하면 J 상품의 수익 Er_J는 상품 J의 위험 σ_J의 대가이다. 효율곡선 zz와 무위험자산이자율 r_F는 모든 투자자에게 공통적인 정보이다. 점 F에서 출발하여 곡선 zz에 접하는 직선은 유일하다. 따라서 점 M도 모든 투자자에게 공통적 정보이다. M이 바로 자본시장점이고 r_M은 자본시장의 수익률이다.

자산구성이론의 의의는 다음과 같다. 첫째, 위험을 분산하고 줄일 수 있는 가능성을 보여준 첫 번째 성과이다. 국채와 같은 무위험자산의 존재가 위험을 줄일 수 있다는 사실은 위에서 설명한 파생상품에서 절정에 달했다고 생각된다. 그러므로 국채의 수익률을 높여 효율직선의 범위를 넓히는 방법의 고안이야말로 위험을 줄이는데 관건이 된다고 생각할 수 있다.

둘째, 식 (73)은 $\sigma_J = (1-a)\sigma_M$일 때 식 (71)과 동일하다. 이것은 a의 결정에 달려 있는데 문제는 a의 결정 역시 투자자 개인의 선호(preference)에 달려 있다는 점이다. 즉, 점 J의 결정이 수익과 위험에 대한 투자자의 선호에 의해 좌우된다. 이것은 무위험자산과 무위험자산 사이의 금융결정이 투자자의 선호에 달려 있다는 사실을 반영한다. 이와 대조적으로 점 M의 결정은 투자자의 선호와 아무 상관이 없다. 점 M은 시장의 위험자산구성으로 투자결정인데 투자결정과 금융결정은 분리되어 있으므로 이 현상을 분리정리(separation theorem)라고 부른다.

셋째, 식 (71)은 개인의 금융결정이 시장 포트폴리오와 일차관계임을 암시한다. 일반화하면 개인의 투자 수익은 자산의 뭉치인 펀드 수익과 일차관계이다. 즉, 무위험자산과 위험자산 사이의 금융결정은

$$y_i = a_i + b_i \Sigma_j A_j \tag{74}$$

이다. 여기서 a_i는 개인 i의 무위험자산 보유에서 얻어지는 소득이고, $\Sigma_j A_j$는 위험자산 A_j로 구성된 펀드의 수익을 가리키며, b_i는 개인 i의 보유비율이다. 식 (74)를 소득배분규칙(income sharing rule)이라고 부른다. 이 규칙이 의의를 갖는 이유는 다음의 식과 비교하면 알 수 있다.

$$y_i = a_i + \Sigma_j b_{ij} A_j \tag{75}$$

식 (75)에서 소액투자자는 스스로 개별 위험자산에 투자해야 한다. 이 때 b_{ij}는 개인 i가 개별 자산 j를 보유하는 비율을 가리킨다. 그러나 소액투자자는 시장이 제시하는 모든 자산을 보유할 수 없다. 그러므로 어떤 b_{ij}는 영이다. 이에 비하면 식 (74)에서 소액투자자는 개별 자산을 보유하는 것이 아니라 개별 자산을 모아서 만든 뮤추얼 펀드에 투자하는 것이므로 사실상 펀드를 구성하는 모든 자산을 보유하는 셈이다. 식 (75)의 경우에 비하면 소득이 증가할 수 있다. 이러한 의미에서 식 (74)를 파레토 최적 소득배분규칙(Pareto optimal income sharing rule)이라고 부른다. 식 (74)는 뮤추얼 펀드나 수익증권의 역할을 반영하는 식이다.

뮤추얼 펀드의 의의는 금융자산을 세분할 수 있다는 점이다. 세분할 수 있는 상품의 대표적인 것은 화폐이다. 다른 상품은 세분이 되지 않는다. 제철소의 용광로는 세분할 수 없고 세분하면 더 이상 용광로가 아니다. 헬리콥터를 세분하면 날 수 없다. 자동차를 세분한다는 것은 이미 폐차임을 뜻한다. 확대하여 생각하면 갖고 있는 돈은 조금인데 덩치가 큰 아파트나 땅은 엄두가 나지 않는다. 세분이 되지 않기 때문이다. 조그만 소액을 모아서 엄두가 나지 않던 넓은 땅을 살 수 있는 제도가 등장하였다. 부동산 투자신탁인 리츠(REITS)이다. 주식 역시 마찬가지이다. 제철소의 용광로는 쪼개서 팔 수 없지만 주식으로 쪼개서 팔 수 있다. 한국 상장기업의 주식을 골고루 섞어 살 수 있는 방법이 뮤추얼 펀드이다.

돈에서 시작하여 주식과 채권을 거쳐 각종 금융상품에 이르기까지 금융이란 기본적으로 물건을 쪼개는 역할을 한다. 각자 분수에 맞게 수익을 나누어 갖게 되어 소득분배 개선에 기여할 수 있다. 수익을 배분할 때 위험도 함께 배분된

다. 위험 분산의 비밀이 여기에 있다. 금융의 발달을 비유하여 설명하면 산 위에 있던 큰 바위가 바다에 도달해 모래알로 쪼개지듯이 세상의 모든 것을 모래알처럼 쪼개는 것과 같은 이치이다. 한 주먹으로 가질 수 있고 한 양동이로 퍼담을 수 있다. 자신의 능력껏 얼마든지 퍼담을 수 있다. 산 위의 바위 상태로는 이것이 불가능하였지만 바닷가의 모래 상태로는 가능하다.

금융은 금융시장에서만 이런 역할을 하는 것이 아니다. 전에는 좋은 그림은 궁전이나 교회에서만 볼 수 있었다. 좋은 그림은 비싸서 평민들 차례가 아니었다. 귀한 책도 돈이 없으면 사볼 수 없었다. 그러나 조금씩 돈을 내어 거대한 박물관이나 아름다운 미술관을 지어 많은 사람들이 관람할 수 있도록 하는 것은 결국 문화재를 쪼개고 명화를 세분하는 셈이다. 도서관을 세워서 수많은 책을 나누어 읽을 수 있게 된 것 역시 책을 쪼갠 것과 같다. 학교가 없던 시절 각자가 지식을 전수 받는 일은 비용이 매우 큰 행사였다. 각자 모든 방면의 가정교사를 두는 교육제도는 귀족이나 할 수 있는 일이었다. 과거에 대부분의 지식이 소수에게 독점된 까닭은 학교라는 제도가 없었기 때문이다. 학교란 지식을 쪼개는 곳이다. 상품, 땅, 기계, 명화, 유물, 지식, 무엇이든 쪼개고 세분하는 것이 모든 사람의 경제적 지위를 향상하는 길이다. 식 (74)와 식 (75)의 차이가 바로 이것이다. 자산구성이론의 핵심은 세분할 수 없는 상품을 금융이 세분할 수 있도록 한다는 데 있다.

Ⅳ. 자본자산가격 모형

29. 자산구성이론이 실제적으로 성립하려면 첫째, 시장자산구성점 M의 정의가 명확해야 한다. 그러나 실제에서 한 경제의 모든 자산을 포함한 자산구성의 정의를 어떻게 해야 하느냐 하는 것은 문제이다. 자산구성에 단순한 금융자산 이외에 위에서 언급한 부동산, 미술품, 나아가서 교육을 통한 인적자본까지 포함한다면 시장자산구성점 M을 실제로 측정한다는 것은 불가능하다. 둘째, 투자자 개인의 수익과 위험에 대한 선호를 사전에 알아야 한다. 이것이 평균-분

산 이론의 한계이다. 이를 극복하려고 등장한 이론이 자본자산가격모형이다. 그러나 이 모형은 그 이상의 의의가 있다. 자산구성이론은 투자자가 자산을 구성하는 원리를 설명하는 데에 대하여 자본자산가격모형은 자산가격이 어떻게 결정되는지를 설명한다. 즉, 가격결정이론이다.

Sharpe-Lintner-Mossin의 자본자산가격모형은 비슷한 시기에 동시에 발견되었다. 식 (73)의 등호의 오른쪽 항에 분자와 분모에 σ_M을 곱해 주면 다음과 같이 표현할 수 있다.

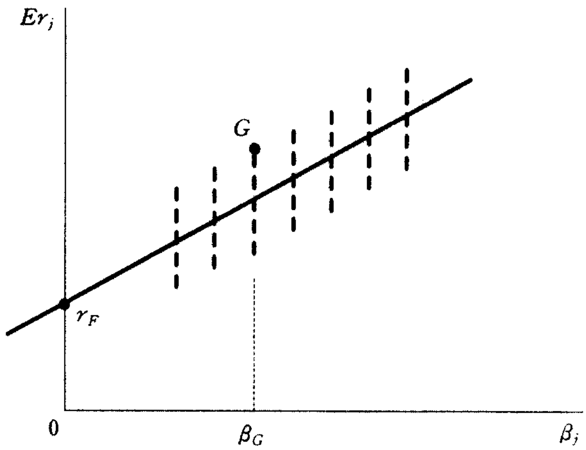
$$Er_J = r_F + (Er_M - r_F)\frac{\sigma_J \sigma_M}{\sigma_M^2} \tag{76}$$

점 J와 점 M은 직선으로 연결되어 있다. 이것은 상품 J의 수익률과 M 상품의 수익률 사이의 상관계수가 1이라는 뜻이다. 이것이 가능하려면 상품 J는 자본시장직선에 놓여 있어야 하는데 이것은 상품 J가 효율적인 상품이라는 뜻이다. 그러나 언제나 효율적으로 투자할 수 없다. 따라서 자본시장직선 안에서 비효율적으로 일어나는 투자까지 설명할 필요가 있다. 즉, 자본시장선 내부의 임의의 한 점 J는 점 M과 직선이 아니라 곡선을 형성한다. 이것은 자본시장직선 내부의 상품 J와 상품 M 사이의 상관계수가 1보다 작다는 것을 의미한다. 따라서 식 (76)을 일반화하면

$$Er_J = r_F + (Er_M - r_F)\frac{\rho_{JM}\sigma_J \sigma_M}{\sigma_M^2} \tag{77}$$

이 된다. 여기서 ρ_{JM}은 상품 J와 상품 M 사이의 상관계수를 가리킨다. 이 상관계수가 1이면 식 (77)은 식 (76)이 된다. 따라서 식 (76)은 상관계수가 1이어서 효율직선상에 있는 상품의 경우에 해당하는 식이고, 식 (77)은 상관계수가 1보다 작아서 효율직선 내부에 있는 상품의 경우이다. 식 (77)의 부호를 간소화하여 다시 정리하면

〈그림 3〉



$$Er_J = r_F + (Er_M - r_F)\beta_J \tag{78}$$

가 되는데 이것이 증권시장선(security market line: SML)이다. 〈그림 3〉의 직선이 이것이다. β_J는 위험을 측정하는 새로운 측정치이다. 즉, 임의의 상품 J의 무위험수익률을 제외한 평균수익률은 시장의 무위험수익률을 제외한 평균수익률에 위험측정치 β_J를 곱한 것이다. 다시 말하면 상품 J의 위험에 대한 대가인 할증률은 시장위험에 대한 대가인 할증률에 상품 J의 위험측정치를 감안한 것이다. 식 (78)에 의하면 상품 J의 수익 Er_J는 상품 J의 위험측정치 β_J에 대한 대가이다. β_J의 분모는 시장수익률의 분산이고 분자는 시장수익률과 상품 J의 수익률 사이의 공분산이다.

30. 증권시장선을 둘러싸고 β_J의 크기에 따라 여러 개의 점이 표현되어 있는데 각 점은 다음의 식

$$r_J = (1-\beta_J)r_F + \beta_J r_M + \varepsilon_J \tag{79}$$

를 의미한다. 〈그림 3〉에서 가령 점 G는 위험측정치가 β_G일 때 증권시장선 위에 있다. 증권시장선과 이 점 사이의 거리가 오차항이다. 위험측정치 β_G하에서 점 G의 수익률은 평균수익률보다 높다. 이 상품에 대한 투자자들의 수요가 증가한다. 이 상품의 가격은 오르고 수익률은 내려간다. 균형으로 수렴한다. 따라서 증권시장선은 균형선이라고 할 수 있다. 이 균형선이 증권의 가격을 결정한다. 이것이 자본자산가격결정모형의 내용이다.

31. 자본자산가격모형은 자산의 구성 원리를 설명하는 자산구성이론을 한 단계 더 발전시켜 자산가격을 결정하는 이론으로 전환시켰다. 이에 따라 자본자산가격모형은 무위험자산과 위험자산으로 임의의 자산의 수익률 Er_j를 설명하는 것인데, 그 문제의 임의의 자산의 분산 σ_j는 모형식에 등장하지 않는다. 즉, 자산자본가격모형인 식 (78)에서 문제의 자산의 위험은 베타(β)에 의해 결정되는데 이것은 문제의 자산의 수익과 시장수익과의 공분산에 의해 평가된다. 그러나 수익-위험의 분석의 대원리는 자산의 수익은 위험에 대한 대가이므로 수익이 크다는 것은 위험이 크다는 것을 의미한다. 자산자본가격모형은 이 대원리에 어긋난다. 만일 분산이 매우 커서 위험이 높은 자산의 수익 역시 높게 평가되어야 하는데 이 자산의 수익이 시장수익과의 공분산이 낮으면 β가 낮아져서 아무리 분산이 높다 하여도 낮게 평가될 수밖에 없다. 심지어 공분산이 영이라면 이 자산의 수익률은 무위험수익률에 불과하게 된다. 더욱이 공분산이 음의 크기라면 무위험수익률보다 낮게 된다. β로 평가하는 자산의 수익률은 이 같은 문제를 포함하고 있다.

이 밖에도 다른 문제가 포함되어 있다. 위험자산의 구성이 커져 마침내 시장자산구성과 일치하게 되면 시장위험만 남고 모든 개별적인 자산의 위험은 분산되어 없어진다. 이것은 대수의 법칙이다. 그러나 자산자본가격모형에는 시장자산구성 이외에 아무리 대규모 자산구성이라도 위험은 분산되지 않는다는 약점이 있다. 이 약점은 대규모 자산구성에 포함된 자산의 오차항 사이에 공분산이 존재하기 때문이라는 것이 밝혀졌다. 시장 포트폴리오 대신 임의의 대규모 포트폴리오로 대체하면 이 포트폴리오와 설명하고자 하는 포트폴리오 사이에는 공

분산이 존재하는 것은 영이 아닌 β가 증명한다. 즉, 식 (79)가 계량경제학적으로 성립하려면

$$E(r_M \varepsilon_J) = 0 \tag{80}$$

이 성립해야 한다. 이것은 다시

$$E(\varepsilon_M \varepsilon_J) = 0 \tag{81}$$

을 의미한다. 그러나 시장의 M 속에는 이미 상품 J가 포함되어 있기 때문에 조건 (68)은 성립할 수 없다. 즉,

$$E(\varepsilon_M \varepsilon_J) \neq 0 \tag{82}$$

이다. 이것은 상품 J의 크기가 아무리 커져도 상품 J의 개별적인 위험(공분산)이 없어지지 않는다는 점을 의미한다. 이 약점을 극복하기 위하여 Ross[25]가 제시한 이론이 재정가격모형(arbitrage pricing theory : APT)이다. 비로소 금융이론에 있어서 재정의 중요성이 명시적으로 크게 부각되었다. 그러나 재정의 중요성이 절정에 달한 것이 파생상품 가격결정에서 드러났다. 식 (8′)과 식 (18′)이 그 내용이다.

V. 재정가격이론[26]

32. 재정(absence of arbitrage)의 핵심은 자산가격결정이 일차함수(positive linear pricing rule), 즉 재정의 일차성(linearity)이라는 점이다. 이것은 상품의 가격결정은 1물1가의 법칙을 따른다는 균형이론과 일치한다. 이것이 재정가격이론

25) Ross [18].

26) 김학은 [3].

의 직관적인 출발점이다.27) 식 (12)가 설명한 대로 Arrow-Debreu의 상태가격은 일차함수이다.

$$\Phi x = \Sigma_{\theta} \Phi_{\theta} x_{\theta} \tag{83}$$

상태 θ가 발생하면 수익 x_{θ}를 약속하고 그렇지 않으면 아무 것도 약속하지 않는 기초증권(elementary claims), 즉 조건부증권(contingent security)으로 구성된 합성증권(composite claims or complex claims)의 경우이다. 따라서 x_{θ}는 서로 독립이다. 이 때 합성증권 J의 가격은

$$S_J = \Phi x \tag{84}$$

이다. 이 정의가 성립하면 재정이 성립한다. 1물1가의 법칙이 적용되기 때문이다. 이제 논의를 단순하게 만들기 위하여 앞처럼 두 경우를 상정하자. 그러면 식 (84)는

$$S_J = \Phi_1 x_1 + \Phi_2 x_2 \tag{85}$$

이다. 식 (85)의 양변을 $(1+r_F)/S_J$를 곱해 주어 위험중립의 세계에서 마팅게일 표현을 사용하면

$$r_F = \pi^* r_1 + (1-\pi^*) r_2 \tag{86}$$

가 된다. 그러므로 식 (86)은 식 (22)이다. 식 (83)에서 x_{θ}가 서로 독립이므로 r_1과 r_2는 서로 독립이다. 식 (86)에서 위험중립형의 투자자에게는 위험중립의 수익률 r_F를 택하는 제1선택(등호의 왼쪽)과, 상태 1의 조건부수익률 r_1과 상태 2의 조건부수익률 r_2의 마팅게일 가중평균(등호의 오른쪽)을 택하는 제2선

27) Huberman [9].

택이 동일하다. 다시 말하면 마팅게일 확률하에서는 예상할 수 있는 상태수익률은 위험중립의 수익률 r_F 보다 낮은 상태 1의 조건부수익률 r_1 과 위험중립의 수익률 r_F 보다 높은 상태 2의 조건부수익률 r_2 등 2개의 상태수익률이 있다. 그러나 이 2개 이외에 제3의 상태가 있을 수 있다. r_F 보다 낮은 r_1 상태와 r_F 보다 높은 r_2 상태 사이에 r_F 를 그대로 유지하는 상태이다. 따라서 식 (86)은

$$r_F = p_1^* r_1 + p_2^* r_2 + p_3^* r_F \tag{87}$$

와 동일하다. 여기서

$$p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \tag{88}$$

$$\pi^* = \frac{p_1^*}{p_1^* + p_2^*} \tag{89}$$

이다. 즉, 다음 기에 r_F 를 그대로 유지할 상태를 식 (86)에 포함할 경우, 상태 1의 조건부수익률 r_1 이 될 마팅게일 확률 p_1^*, 위험중립의 수익률 r_F 보다 높은 상태 2의 조건부수익률 r_2 가 될 마팅게일 확률 p_2^*, r_F 를 그대로 유지할 마팅게일 확률 p_3^* 로 표현된 것이 식 (87)이다.

한편, 자연상태에서 다음의 정의식이 성립한다.

$$Er_J = \pi r_1 + (1 - \pi) r_2 \tag{90}$$

식 (90)은 식 (18)과 동일하다. 이것은 마팅게일의 세계가 아니라 현실의 세계이다. 확률 π 가 현실의 확률이기 때문이다. 즉, 상품 J 의 기대수익률은 정의에 의하여 상태 1의 조건부수익률 r_1 과 상태 2의 조건부수익률 r_2 의 가중평균이다. 가중치가 현실의 확률 π 이다. 식 (86)이 식 (87)로 전환되듯이 식 (90)

도 다음과 같이 전환할 수 있다.

$$Er_J = p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 Er_J \tag{91}$$

여기서

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \tag{92}$$

$$\pi = \frac{p_1}{p_1 + p_2} \tag{93}$$

이다. 식 (87)과 식 (91)에서 다음을 얻는다.

$$Er_J = (1 - \beta_{J1} - \beta_{J2}) r_F + \beta_{J1} r_1 + \beta_{J2} r_2 \tag{94}$$

여기서

$$\beta_{Ji} = \frac{p_i - p_i^*}{p_1 + p_2}, \qquad i = 1, 2 \tag{95}$$

이다. 식 (94)에서 상품 J의 평균수익률은 수익률 r_J와 오차항 ε_J의 합이므로

$$r_J = (1 - \beta_{J1} - \beta_{J2}) r_F + \beta_{J1} r_1 + \beta_{J2} r_2 + \varepsilon_J \tag{96}$$

이다. 이것이 상태가 1과 2, 2개일 때의 재정가격이론인데 상태의 수를 $k = 1, 2, \cdots, K$로 일반화하면

$$r_J = (1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{Jk}) r_F + \sum_{k=1}^{K} \beta_{Jk} r_k + \varepsilon_J \tag{97}$$

가 된다. 이 때 오차항은 다음의 특성을 갖는다.

$$E\varepsilon_J = 0 \tag{98}$$

$$E\varepsilon_J^2 = \sigma^2 \tag{99}$$

$$E\varepsilon_{Jl} = 0, \qquad J \neq l \tag{100}$$

자본자산가격모형과 비교할 때 조건(100)이 다르다는 사실이 눈에 띈다. 즉, 조건 (100)은 조건 (82)와 다르다. 이 밖에 상품 J의 규모가 커질수록 오차항의 분산은 줄어들고 상품 J가 마침내 시장 포트폴리오와 일치하면 오차항의 분산은 시장의 체계적 위험만 나타내는 분산으로 줄어든다. 그렇게 되기 전에는 오차항의 분산은 상품 J의 비체계적 위험과 시장의 체계적 위험을 포함하는데 상품 J의 규모가 커질수록 대수의 법칙에 의해 오차항의 비체계적 위험만 줄어든다. 이 내용은 33에서 다시 다루어질 것이다.

33. 재정가격결정이론을 그림으로 설명하면 자본자산가격결정모형과 비교할 수 있다.28) 식 (94)에서 2개의 설명변수 r_1과 r_2는 독립이므로 그 사이의 상관계수는 영이다. 즉, 식 (67)에 의해서

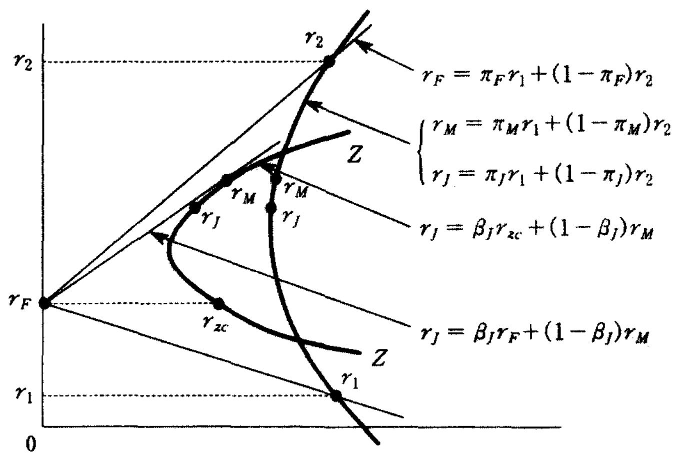
$$COV(r_1, r_2) = 0 \tag{101}$$

이다. 따라서 r_1과 r_2가 만드는 포트폴이오 곡선은 〈그림 4〉의 곡선 XX와 같다. 이 곡선의 한 점이 Er_J의 점이다. 한편, 식 (86)이 만드는 포트폴리오 곡선은 r_F와 r_2를 연결한 직선과 r_F와 r_1을 연결한 직선 $Y r_F Y$로 구성되어 있다. 이 2개의 포트폴리오 곡선을 합성하면 〈그림 2〉의 평균-분산의 포트폴리오 곡선 ZZ와 일치한다. 그것은 다음과 같이 설명할 수 있다.

먼저 직선 $Y r_F Y$의 방정식은 식 (86)인데 이것은 식 (87)과 동일하다. 다음 곡선 XX의 방정식은 식 (100)인데 이것은 식 (91)과 동일하다. 식 (87)과 식 (91)에서 식 (94)가 성립한다. 이제 식 (86)에서 식 (87)을 유도하였듯이 같

28) 김학은 [3].

〈그림 4〉



은 절차를 곡선 XX 에서

$$Er_M = \pi_M r_1 + (1-\pi_M) r_2 \tag{102}$$

에 적용하면

$$Er_M = p_{M1} r_1 + p_{M2} r_2 + p_{M3} Er_M \tag{103}$$

을 얻는다. 식 (103)과 식 (87)에서

$$Er_M = (1-\beta_{M1}-\beta_{M2}) r_F + \beta_{M1} r_1 + \beta_{M2} r_2 \tag{104}$$

가 된다. 식 (104)와 식 (78)에서

$$Er_J = (1-\beta_J) r_F + \beta_J Er_M \tag{105}$$

이 성립한다. r_F는 r_M과 상관관계가 영인데 $r_{ZC(M)}$ 역시 r_M과 상관계수가

영이다. 따라서 식 (105)는

$$Er_J = (1-\beta_J)Er_{ZC(M)} + \beta_J Er_M \tag{106}$$

이 되는데 이것이 곡선 *ZZ* 이다.

34. 재정가격결정이론이 자본자산가격결정모형의 단점을 극복한 것은 앞의 31의 말미에서 언급한 대로 다른 측면에서 살펴볼 수 있다. 식 (106)은

$$r_M = (1-\beta_{M1}-\beta_{M2})r_F + \beta_{M1}r_1 + \beta_{M2}r_2 + \varepsilon_M \tag{107}$$

이다. 한편 식 (106)은

$$r_J = (1-\beta_J)r_F + \beta_J r_M + \varepsilon_J \tag{108}$$

가 된다. 식 (107)을 식 (108)에 대입하여 정리하면

$$r_J = (1-\beta_{J1}-\beta_{J2})r_F + \beta_{J1}r_1 + \beta_{J2}r_2 + \mu_J \tag{109}$$

가 된다. 여기서

$$\mu_J = \beta_J\varepsilon_M + \varepsilon_J \tag{110}$$

이다. 상품 J의 수익률의 오차항(위험)은 두 가지로 구성되어 있다. 하나는 시장 M의 수익률의 위험(체계적 위험)이고 또 하나는 상품 J의 고유의 위험(비체계적 위험)이다. 식 (110)에 의하면 상품 J에 포함된 시장위험은 일부분(β_J)만 담당한다. 후자의 위험은 상품 J의 구성자산의 수가 증가할수록 대수의 법칙으로 감소한다고 알려져 있다. 마침내 상품 J가 시장 M과 동일해지면 β_J가 1이 되므로 시장위험만 남게 된다. 이것이 재정가격이론의 핵심이다.

35. 현실에서 장차 발생할지 모르는 상태의 정체와 그 수를 알 수 없다. 이것이 재정가격이론의 제약이지만 그렇다고 이 이론의 핵심까지 무시할 수 없다. 문제는 현실에서 임의의 수익률 r_j를 설명하는 K요소(K factor)의 정체를 어떻게 정의하느냐가 관건이다. 여기에 계량경제학의 이론을 빌려올 필요가 있다. 그러나 이상의 논의에서 K요소들 가운데 한 가지 특성을 알 수 있다. 〈그림 1〉에서 $r_2 > r_F > r_1$을 가정하였으므로 식 (21)과 식 (22)에서

$$r_2 > Er_M > r_F > r_1 \tag{111}$$

이다. 이것은 K요소를 선택할 때 그 가운데 1개의 요소는 반드시 r_F보다 작아야 하고 다른 1개는 반드시 Er_M보다 커야 한다는 점이다.

VI. 맺는 말

36. 현대금융이론의 핵심은 자산가격결정을 어떻게 설명하느냐이다. 일종의 가격론이다. 자산구성이론과 차이점이 바로 이것이다. 파생상품가격결정은 수학적으로 제한된 범위 내에서 설명되고 있다. 그러나 원상품가격결정은 이론적으로 훌륭하지만 결정요소의 정체가 아직도 불분명하다는 제약을 안고 있다.

본 논문은 현대금융이론을 재정을 이용하여 정리하였다. 경제학에서 가격은 균형에서 결정된다. 이것은 금융이론에서는 재정에 해당하는 개념이다. 따라서 재정개념은 현대금융이론의 출발점이며 종착점이다.

▣ 참 고 문 헌 ▣

1. 김학은, 『화폐와 시간』, 서울: 법문사, 1991.
2. ______, "본원-쌍대 공간에 의한 옵션가격결정 설명", 미발표 원고, 2002.
3. ______, "애로우-드부루 모형에 의한 재정가격이론", 미발표 원고, 2002.
4. ______, "콜거울과 풋거울: 옵션가격결정", 『경제학연구』 제출원고, 2002.
5. 후지이, 『의표를 찌르는 이야기』, 서울: 꿈과 삶, 1991.
6. Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy* 81, May-June, 1973, pp. 637～654.
7. Chriss, N., *Black-Scholes and Beyond*, New York : MacGraw Hill, 1997.
8. Hicks, J., *Value and Capital*, 2nd edition, London : Oxford University Press, 1946.
9. Huberman, G., "Arbitrage Pricing Theory," in J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman (eds.), *Finance*, New York : Norton, 1989, pp. 72～80.
10. Ingersoll, J., "Option Pricing Theory," in J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman (eds.), *Finance*, New York : Norton, 1989, pp. 199～212.
11. Karr, A., "Martingales," in J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman (eds.) *The New Palgrave A Dictionary of Economics*, Vol. 3, London: Macmillan, 1987, pp. 366～367.
12. Lintner, J., "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets," *Review of Economics and Statistics* 47, February, 1965, pp. 13～37.
13. Markowitz, H., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, New York : Wiley, 1959.
14. Merton, R., "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, Spring 1973, pp. 141～183.
15. Moore, W., *A Life of Erwin Schrodinger*, Cambridge: Cambridge University Press, 1994; 전대호 옮김, 『슈뢰딩거의 삶』, 서울: 사이언스북, 1997.
16. Mossin, J., "Equilibrium in a Capital Asset Market," *Econometrica* 34, October,

1966, pp. 768～783.

17. Neftci, S., *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, 2nd edition, New York : Academic Press, 2000.

18. Ross, S., "Finance," in J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman (eds.), *Finance*, New York : Norton, 1989, pp. 1～34.

19. Sharpe, W., "Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *Journal of Finance* 19, September, 1964, pp. 425～442.

20. Singh, S., *Fermat's Last Theorem*, London: Christopher Little, 1997; 박병철 옮김, 페르마의 마지막 정리, 서울: 영림 카디널, 1998.

21. Tobin, J., "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk," *Review of Economic Studies* 25, February, 1958, pp. 65～86.