연세경제연구 제 Ⅷ권 제 1 호
Yonsei Economic Studies, Vol. Ⅷ, No. 1 (March 2001)

선형결합의 수학적 특성과 선간이동의 정의

김 학 은

본 연구는 경제학에서 자주 사용하는 선형결합의 알려지지 않은 특성을 조사하고, 그 수학적 특성을 이용하여 선간이동이 일반적으로 불가능하다는 사실을 증명한다. 선간이동의 대표적인 예는 소득효과 또는 수량효과이다. 선간이동이 불가능하면 전통적인 비용함수의 정의도 불가능하다.

I

김학은 [4]은 변수의 전환성을 이용하여 선상이동(a movement along a line)의 불가능성을 증명하였다. 변수전환이 중요한 역할을 하는 좋은 예는 화폐의 유통속도 V가 마샬의 k로 전환되는 예이다. 김학은 [5]은 이 변수전환을 이용하여 유통속도를 분할하였다. 또 하나의 좋은 예는 금융이론에서 증권시장선의 식이다. 이 식은 산술평균의 식으로 $ER_i = (1-\beta_i)R_F + \beta_i ER_M$인데 증권의 금리와 가격의 역관계를 이용하여 변수전환을 하면 조화평균의 식인 $\frac{1}{EP_i} = \frac{1-\beta_i}{P_F} + \frac{\beta_i}{EP_M}$으로 전환된다. 이것은 직각쌍곡선의 식이다. 변수전환과 함께 산술평균은 조화평균으로, 직선은 곡선으로 전환되는 것을 다시 한 번 확인할 수 있다.

연세대학교 경제학과, 서울시 서대문구 신촌동 134, 120-749.

한편, 선상이동의 대표적인 예는 힉스 대체효과이다. 본 연구에서는 선상이동의 불가능성에서 보인 몇 가지 정리를 이용하여 선간이동(a movement among lines)을 정의하려고 한다. 선간이동의 대표적인 예는 소득효과 또는 수량효과이다. 수량효과의 중요성은 생산이론에서 확장선과 비용함수에 기초를 제공한다는 데에 있다.

Ⅱ

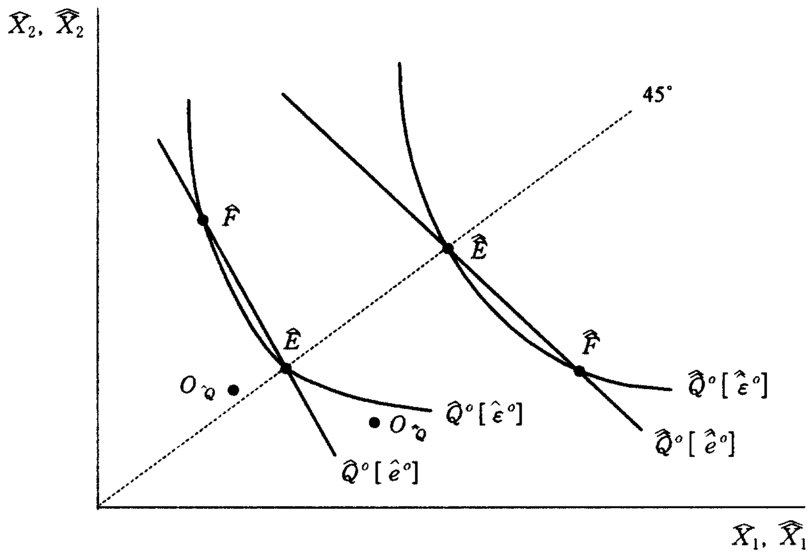
김학은 [4]의 정리 3은 변수전환을 이용하여 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다. 평균치 $\hat{Q}^o$에 대해 가중치 $\hat{e}^o$와 $\hat{\varepsilon}_o$가 일정하게 주어지면 $\hat{X}_1$과 $\hat{X}_2$의 좌표상에서 산술평균치 $\hat{Q}^o[\hat{e}^o]$와 조화평균치 $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o]$의 식

$$\hat{Q}^o[\hat{e}^o]: \quad \hat{Q}^o = \hat{e}^o\hat{X}_1 + (1-\hat{e}^o)\hat{X}_2 \tag{1}$$

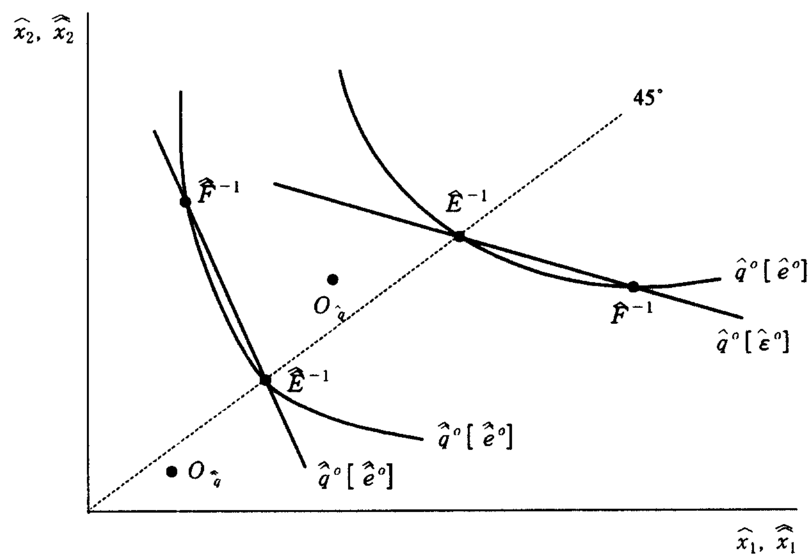
$$\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o]: \quad \frac{1}{\hat{Q}^o} = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_1} + \frac{1-\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_2} \tag{2}$$

가 존재한다. 산술평균치의 정의식 (1)과 조화평균치의 정의식 (2)가 각각 김학은 [4]의 식 (30)과 식 (29)이다. 조화평균치의 정의식 (2)의 기하학적 표현이 〈그림 1〉의 $\hat{X}_1$과 $\hat{X}_2$의 좌표상에서 직각쌍곡선 $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o]$인데 그 중심(center)은 $O_Q = [\hat{\varepsilon}^o\hat{Q}^o, (1-\hat{\varepsilon}^o)\hat{Q}^o]$이다. 직각쌍곡선은 무차별곡선이나 등량곡선이라 부를 수 있다. 사실상 고정대체탄력생산함수(CES)는 대체탄력도를 감안한 생산요소를 새로운 변수로 정의하면 새로운 변수의 좌표에서 직각쌍곡선이 된다. 식 (1)과 식 (2)는 두 점에서 만나는데 그 가운데 한 점 $\hat{E} = [\hat{Q}^o, \hat{Q}^o]$는 자명한 풀이이다. 자명한 풀이를 제외한 나머지 점의 좌표는 $\hat{F} = \left(\frac{\hat{\varepsilon}^o}{e^o}\hat{Q}^o, \frac{1-\hat{\varepsilon}^o}{1-e^o}\hat{Q}^o\right)$이다. 점 $\hat{F}$에서 조화평균치의 정의식 (1)이 묘사하는 직각쌍곡선의 한계대체율과 그 점에 접하는 직선의 기울기 $\hat{p}^o$의 관계는 다음과 같이 주어진다.

〈그림 1〉 본원공간의 선간이동



〈그림 2〉 쌍대공간의 선간이동



$$\frac{\hat{\varepsilon}^o}{1-\hat{\varepsilon}^o}\left(\frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1}\right)^2\Bigg|_{\hat{F}} = \hat{p}^o \tag{3}$$

식 (3)은 직각쌍곡선 $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o]$의 한 점 $\hat{F}$에서 한계대체율이 상대가격과 일치하는 한계수량균등의 법칙인데 김학은 [4]의 식 (28)이다. 직각쌍곡선의 정의식 (2)가 주어졌을 때 그 곡선상에 두 점 $\hat{E}$와 $\hat{F}$를 연결한 직선이 산술평균치의 정의식 (1)이다. 〈그림 1〉의 직선 $\hat{Q}^o[\hat{e}^o]$이 그의 기하학적 표현이다.

이제 공간을 전환하여 동일한 문제를 고찰해 본다. 식 (1)~(3)이 표현된 공간이 본원공간이라면 그들이 변수전환된 공간은 쌍대공간이다. 변수전환의 정의 $\hat{Q}^o\hat{q}^o=1$, $\hat{X}_1\hat{x}_1=1$, $\hat{X}_2\hat{x}_2=1$를 이용하면 쌍대공간에서 식 (1)~(2)는 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{q}^o[\hat{e}^o]:\ \frac{1}{\hat{q}^o} = \frac{\hat{e}^o}{\hat{x}_1} + \frac{1-\hat{e}^o}{\hat{x}_2} \tag{4}$$

$$\hat{q}^o[\hat{\varepsilon}^o]:\ \hat{q}^o = \hat{\varepsilon}^o\hat{x}_1 + (1-\hat{\varepsilon}^o)\hat{x}_2 \tag{5}$$

식 (2)의 형태로 표현되는 생산함수가 가령 1개월에 5명의 노동자와 10대의 기계를 사용하여 생산물 15개를 만드는 생산관계라 할 때 이 관계를 변수전환한 식 (5)가 1개의 생산물을 만드는데 걸리는 기간은 1명의 노동자로 1개의 생산물을 만드는 기간과 1대의 기계로 생산물을 만드는 기간의 가중평균으로 나타난다. 식 (4)~(5)는 각각 김학은 [4]의 식 (37)~(38)이다. 식 (4)의 기하학적 표현은 〈그림 2〉의 직각쌍곡선 $\hat{q}^o[\hat{e}^o]$로 그의 중심은 $O_{\hat{q}} = [\hat{e}^o\hat{q}^o, (1-\hat{e}^o)\hat{q}^o]$이다. 식 (5)의 기하학적 표현은 〈그림 2〉의 직선 $\hat{q}^o[\hat{\varepsilon}^o]$이다. 식 (4)와 식 (5)는 쌍대공간의 두 점에서 만난다. 이 가운데 한 점 $\hat{E}^{-1}=[\hat{q}^o, \hat{q}^o]$는 자명한 풀이이다. 자명한 풀이를 제외한 나머지 점의 좌표는 $\hat{F}^{-1} = \left(\frac{\hat{e}^o}{\varepsilon^o}\hat{q}^o, \frac{1-\hat{e}^o}{1-\varepsilon^o}\hat{q}^o\right)$이다. 본원공간처럼 쌍대공간에서 직각쌍곡선의 정의식 (4)가 주어졌을 때 그 곡선상의 두 쌍대점 $\hat{E}^{-1}$와 $\hat{F}^{-1}$를 연결한 직선이 산술평균치의 정의식 (5)이다. 이 때 $\hat{E}\hat{E}^{-1}=1$이고 $\hat{F}\hat{F}^{-1}=1$이므로 본원풀이와

쌍대풀이는 정확하게 일치한다. 따라서, 식 (4)는 식 (1)과 동일하고, 식 (5)는 식 (2)와 동일하다. 기하학적으로 표현하면 〈그림 1〉의 직각쌍곡선 $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o]$은 〈그림 2〉에서 직선 $\hat{q}^o[\hat{\varepsilon}^o]$으로 전환되고 〈그림 1〉의 직선 $\hat{Q}^o[\hat{e}^o]$은 〈그림 2〉의 직각쌍곡선 $\hat{q}^o[\hat{e}^o]$으로 전환된다.

쌍대점 $\hat{F}^{-1}$에서 조화평균치의 정의식 (1)의 한계대체율과 이 점에서 접하는 직선의 기울기 $\hat{r}^o$는 동일하므로 다음의 한계수량균등의 법칙이 성립한다.

$$\frac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o}\left(\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}\right)^2\Bigg|_{\hat{F}^{-1}} = \hat{r}^o \tag{6}$$

그러나 식 (3)과 식 (6)으로부터 $\dfrac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o}\,\dfrac{\hat{\varepsilon}^o}{1-\hat{\varepsilon}^o} = \hat{r}^o\hat{p}^o \neq 1$이므로 식 (3)과 식 (6)은 서로 독립이고 다른 방정식이다. 따라서 본원공간과 쌍대공간에서 독립방정식은 식 (1)~(3), 그리고 식 (6)이다.

Ⅲ

선상이동은 하나의 직각쌍곡선상의 2개의 다른 점 사이의 이동이지만 선간이동은 2개의 직각쌍곡선 사이의 이동이므로 직각쌍곡선 (2) 이외에 또 하나의 직각쌍곡선이 필요하다. 하나의 직각쌍곡선 (2)에 대하여 식 (1), 식 (3), 식 (6) 등 3개의 독립방정식이 존재하듯이 (2)와 다른 제2의 직각쌍곡선을 본원공간에 도입하면 이 곡선에 대하여도 똑같은 논리로 3개의 독립방정식이 본원공간과 쌍대공간에서 존재한다. 앞서 직각쌍곡선 (2)에 적용하였던 정리 3을 다시 제2의 직각쌍곡선에 적용하기 위하여 새로운 크기의 평균치 $\hat{\hat{Q}}^o$에 대해 가중치 $\hat{\hat{e}}^o$와 $\hat{\hat{\varepsilon}}^o$가 일정하게 주어지면 다음 4개의 독립방정식이 존재한다.

$$\hat{\hat{Q}}^o[\hat{\hat{\varepsilon}}^o]:\ \hat{\hat{Q}}^o = \hat{\hat{e}}^o\hat{\hat{X}}_1 + (1-\hat{\hat{e}}^o)\hat{\hat{X}}_2 \tag{7}$$

$$\hat{\hat{Q}}^o[\hat{\hat{\varepsilon}}^o]:\ \frac{1}{\hat{\hat{Q}}^o} = \frac{\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{\hat{\hat{X}}_1} + \frac{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{\hat{\hat{X}}_2} \tag{8}$$

$$\frac{\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o}\left(\frac{\hat{\hat{X}}_2}{\hat{\hat{X}}_1}\right)^2\Bigg|_{\hat{F}} = \hat{p}^o \tag{9}$$

$$\frac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o}\left(\frac{\hat{\hat{x}}_2}{\hat{\hat{x}}_1}\right)^2\Bigg|_{\hat{F}^{-1}} = \hat{\gamma}^o \tag{10}$$

식 (8)이 제2의 직각쌍곡선인데 〈그림 1〉의 곡선 $\hat{\hat{Q}}^o[\hat{\hat{\varepsilon}}^o]$이다. 이것은 다시 쌍대공간에서 직선으로 전환되는데 〈그림 2〉의 직선 $\hat{q}^o[\hat{\varepsilon}^o]: \hat{q}^o = \hat{\varepsilon}^o\hat{x}_1 + (1-\hat{\varepsilon}^o)\hat{\hat{x}}_2$이 그것이다. 김학은 [4]의 정리 3에 의해 직각쌍곡선 (8)에 대하여 직선 (7)이 존재하는데 〈그림 1〉의 직선 $\hat{\hat{Q}}^o[\hat{e}^o]$이 그것이다. 이것은 다시 변수전환에 의해 쌍대공간에서 직각쌍곡선으로 전환되는데 〈그림 2〉의 곡선 $\hat{q}^o[\hat{e}^o]: \frac{1}{\hat{\hat{q}}^o} = \frac{\hat{\hat{e}}^o}{\hat{\hat{x}}_1} + \frac{1-\hat{\hat{e}}^o}{\hat{\hat{x}}_2}$이 그것이다.

식 (7)과 식 (8)은 두 점에서 만나는데 이 가운데 한 점 $\hat{\hat{E}} = [\hat{\hat{Q}}^o, \hat{\hat{Q}}^o]$는 자명한 풀이이다. 나머지 점의 좌표는 $\hat{\hat{F}} = \left(\frac{\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{\hat{\hat{e}}^o}\hat{\hat{Q}}^o, \frac{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{1-\hat{\hat{e}}^o}\hat{\hat{Q}}^o\right)$이다. 점 $\hat{\hat{F}}$에서 한계수량균등의 법칙 (9)가 성립한다. 이 본원점에 대응하는 쌍대공간상의 쌍대점은 $\hat{\hat{F}}^{-1} = \left(\frac{\hat{\hat{e}}^o}{\hat{\hat{\varepsilon}}^o}\hat{\hat{q}}^o, \frac{1-\hat{\hat{e}}^o}{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o}\hat{\hat{q}}^o\right)$이고 이 쌍대점에서 한계수량균등의 법칙은 (10)이다.

IV

본원공간상에서 평균치의 크기가 $\hat{Q}^o$에서 $\hat{\hat{Q}}^o$로 증가하였다고 하자. 그러면 하나의 무차별곡선 $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o]$의 한 점 $\hat{F}$에서 제2의 무차별곡선 $\hat{\hat{Q}}^o[\hat{\hat{\varepsilon}}^o]$의 한 점 $\hat{\hat{F}}$으로 선간이동현상을 조사할 수 있다. 본원공간에서 이 같은 선간이동현상은 쌍대공간에서는 하나의 무차별곡선 $\hat{q}^o[\hat{e}^o]$의 한 점 $\hat{F}^{-1}$에서 제2의 무차별곡선 $\hat{\hat{q}}^o[\hat{\hat{e}}^o]$의 한 점 $\hat{\hat{F}}^{-1}$으로 선간이동하는 현상과 동일하다. 이 같

은 선간이동을 설명하는 방정식 가운데 독립방정식만 선택하여 만든 연립방정식 체계 I은 다음과 같다.

〈연립방정식 체계 I〉

$$\frac{1}{\hat{Q}^o} = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_1} + \frac{1-\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_2} \tag{2}$$

$$\hat{Q}^o = \hat{e}^o\hat{X}_1 + (1-\hat{e}^o)\hat{X}_2 \tag{1}$$

$$\frac{\hat{\varepsilon}^o}{1-\hat{\varepsilon}^o}\left(\frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1}\right)^2\Bigg|_{\hat{F}} = \hat{p}^o \tag{3}$$

$$\frac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o}\left(\frac{\hat{X}_1}{\hat{X}_2}\right)^2\Bigg|_{\hat{F}^{-1}} = \hat{r}^o \tag{6}$$

$$\frac{1}{\hat{\hat{Q}}^o} = \frac{\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{\hat{\hat{X}}_1} + \frac{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{\hat{\hat{X}}_2} \tag{8}$$

$$\hat{\hat{Q}}^o = \hat{\hat{e}}^o\hat{\hat{X}}_1 + (1-\hat{\hat{e}}^o)\hat{\hat{X}}_2 \tag{7}$$

$$\frac{\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o}\left(\frac{\hat{\hat{X}}_2}{\hat{\hat{X}}_1}\right)^2\Bigg|_{\hat{F}} = \hat{\hat{p}}^o \tag{9}$$

$$\frac{\hat{\hat{e}}^o}{1-\hat{\hat{e}}^o}\left(\frac{\hat{\hat{X}}_1}{\hat{\hat{X}}_2}\right)^2\Bigg|_{\hat{F}^{-1}} = \hat{\hat{r}}^o \tag{10}$$

이 때 식 (6)과 식 (10)에서 $\hat{X}_1\hat{x}_1 = 1$, $\hat{X}_2\hat{x}_2 = 1$, $\hat{\hat{X}}_1\hat{\hat{x}}_1 = 1$, $\hat{\hat{X}}_2\hat{\hat{x}}_2 = 1$의 변수전환을 이미 사용하였다. 여기에 본원공간의 선간이동이 수량효과가 되는 조건

$$\hat{p}^o = \hat{\hat{p}}^o \tag{11}$$

과 쌍대공간의 선간이동이 수량효과가 되는 조건

$$\hat{r}^o = \hat{\hat{r}}^o \tag{12}$$

을 추가하면 연립방정식 체계는 10개의 독립방정식과 14개의 미지수($\hat{Q}^o$, $\hat{\hat{Q}}^o$, $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$, $\hat{\hat{X}}_1$, $\hat{\hat{X}}_2$, $\hat{e}^o$, $\hat{\hat{e}}^o$, $\hat{\varepsilon}^o$, $\hat{\hat{\varepsilon}}^o$, $\hat{p}^o$, $\hat{\hat{p}}^o$, $\hat{r}^o$, $\hat{\hat{r}}^o$)로 구성되어 있다. 이 가운데 어느 10개의 미지수는 나머지 4개의 미지수의 함수로 표현할 수 있다. 풀이는 다음과 같다.

$$\hat{X}_1 = \hat{X}_2\text{와 } \hat{\hat{X}}_1 = \hat{\hat{X}}_2 \tag{13}$$

풀이 (13)이 주는 의미는 선간이동에 있어서 수량효과는 자명한 풀이에서만 성립한다는 것이다. 다른 말로 표현하면 확장선(expansion path)이 45도선과 일치해야 한다는 뜻이다. 따라서 다음 정리가 성립한다.

정리 1 본원과 쌍대 두 공간에서 선간이동을 할 때 수량효과를 성립시키는 '동일' 기울기 $\hat{p}^o = \hat{\hat{p}}^o$와 $\hat{r}^o = \hat{\hat{r}}^o$를 만족시키는 자명한 풀이 이외의 일반적인 풀이는 양 공간에서 각각의 무차별곡선상에 존재하지 않는다.

증명 : 부록의 증명 1이 제공한다.

정리 1을 다른 말로 표현하면 $\hat{p}^o = \hat{\hat{p}}^o$와 $\hat{r}^o = \hat{\hat{r}}^o$이면 점 $\hat{\hat{F}}$에서 $\hat{\hat{X}}_1 = \hat{\hat{X}}_2$이고, 점 $\hat{F}$에서 $\hat{X}_1 = \hat{X}_2$이라는 뜻이다. 일반적인 수량효과 불가능의 원인은 쌍대공간에서 쌍대점 $\hat{\hat{F}}^{-1}$과 $\hat{F}^{-1}$이 2개의 무차별곡선상에 존재할 수 없고, 그 역도 성립한다는 선상이동 불가능 정리 때문이다(김학은 [4]의 정리 8). 이에 대한 더 근본적인 원인은 변수의 전환성 때문이다.

V

본원공간과 쌍대공간을 '동시에' 만족시키는 수량효과의 정의가 '일반적으로'

불가능하므로 본원점 $\hat{F}$에서 본원점 $\hat{\hat{F}}$로 이동할 때 $\hat{p}^o \neq \hat{\hat{p}}^o$이고 '동시에' 쌍대점 $\hat{F}^{-1}$에서 쌍대점 $\hat{\hat{F}}^{-1}$로 이동할 때 $\hat{r}^o \neq \hat{\hat{r}}^o$이다. 이 때 본원공간에서 하나의 무차별곡선상의 본원점 $\hat{F}$의 접선의 기울기 $\hat{p}^o$가 또 하나의 다른 무차별곡선상의 본원점 $\hat{\hat{F}}$의 접선의 기울기 $\hat{\hat{p}}^o$와 '유일한' 관계를 갖고 이동하는 선간이동현상을 본원 약수량효과라고 부를 수 있고, 이 이동현상과 '동시에' 쌍대공간에서 하나의 무차별곡선상의 쌍대점 $\hat{F}^{-1}$의 접선의 기울기 $\hat{r}^o$가 또 하나의 다른 무차별곡선상의 쌍대점 $\hat{\hat{F}}^{-1}$ 의 접선의 기울기 $\hat{\hat{r}}^o$과 '유일한' 관계를 갖고 이동하는 선간이동현상을 쌍대 약수량효과라고 부를 수 있다. 여기서 '약'(weak)이라는 의미는 $\hat{p}^o \neq \hat{\hat{p}}^o$와 $\hat{r}^o \neq \hat{\hat{r}}^o$의 조건하에서 경제가 각각의 공간에서 하나의 무차별곡선상의 $\hat{p}^o$와 $\hat{r}^o$로 특징지어지는 한 점에서 다른 무차별곡선상의 $\hat{\hat{p}}^o$와 $\hat{\hat{r}}^o$로 특징지어지는 각각의 '유일한' 대응점으로 이동한다는 뜻이다. 문제는 각각의 공간에서 하나의 무차별곡선의 한 점과 다른 하나의 무차별곡선의 한 점 사이에 유일한 관계가 정의될 수 있느냐는 것이다. 유일한 관계가 존재한다면 그것은 각각

$$\hat{\hat{p}}^o = f(\hat{p}^o), \qquad \hat{p}^o \neq \hat{\hat{p}}^o \tag{14}$$

$$\hat{\hat{r}}^o = g(\hat{r}^o), \qquad \hat{r}^o \neq \hat{\hat{r}}^o \tag{15}$$

의 단가함수(single-valued function)의 형태가 될 것이다.

VI

약수량효과의 정의를 사용하면 연립방정식 체계 I에서 불가능한 2개의 강수량효과 정의 $\hat{p}^o = \hat{\hat{p}}^o$와 $\hat{r}^o = \hat{\hat{r}}^o$ 대신, $\hat{p}^o \neq \hat{\hat{p}}^o$를 나타내는 $\hat{p}^o$와 $\hat{\hat{p}}^o$ 사이의 본원 약수량효과 $\hat{\hat{p}}^o = f(\hat{p}^o)$와 $\hat{r}^o \neq \hat{\hat{r}}^o$을 나타내는 $\hat{r}^o$와 $\hat{\hat{r}}^o$ 사이의 쌍대

약수량효과를 정의하는 2개의 숨겨진 독립방정식 $\hat{\hat{p}}^o = f(\hat{p}^o)$과 $\hat{\hat{r}}^o = g(\hat{r}^o)$로 대체할 수 있다. 이들 방정식의 구체적인 형태를 밝히기 위하여 먼저 2개의 실수를 정의한다.

$$\Delta = \frac{(1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o)\hat{\hat{Q}}^o - (1-\hat{\varepsilon}^o)\hat{Q}^o}{\hat{\hat{\varepsilon}}^o \hat{\hat{Q}}^o - \hat{\varepsilon}^o \hat{Q}^o}$$

$$\Omega = \frac{(1-\hat{\hat{e}}^o)\hat{\hat{q}}^o - (1-\hat{e}^o)\hat{q}^o}{\hat{\hat{e}}^o \hat{\hat{q}}^o - \hat{e}^o \hat{q}^o} \quad (16)$$

정의 (16)은 각각 본원공간에서 무차별곡선 중심의 이동거리의 기울기 Δ와 쌍대공간에서 무차별곡선 중심의 이동거리의 기울기 Ω를 나타낸다.

정리 2 본원공간의 무차별곡선 $\hat{\hat{Q}}^o$상에 본원점 $\hat{\hat{F}}$이 주어져 있다. 이 점의 접선의 기울기는 $\hat{\hat{p}}^o$이다. 본원공간의 무차별곡선 $\hat{Q}^o$상에 본원점 $\hat{F}$의 위치를 생각하자. 이 점의 접선의 기울기는 $\hat{p}^o$이다. 그러면 2개의 본원점 사이에는 본원 약수량효과의 방정식 $\hat{\hat{p}}^o = f(\hat{p}^o)$의 구체적인 형태로서

$$\hat{\hat{p}}^o = \frac{1}{\hat{p}^o} \frac{\widehat{\widehat{\varepsilon}}^o}{1-\widehat{\widehat{\varepsilon}}^o} \frac{\widehat{\varepsilon}^o}{1-\widehat{\varepsilon}^o} \Delta^2 \quad (17)$$

가 유일하게 존재한다. 본원점 $\hat{\hat{F}}$과 대수적으로 일치하는 쌍대점 $\hat{\hat{F}}^{-1}$이 쌍대공간의 무차별곡선 $\hat{\hat{q}}^o$상에 존재한다. 이 점의 접선의 기울기는 $\hat{\hat{r}}^o$이다. 본원점 $\hat{F}$과 대수적으로 일치하는 쌍대점 $\hat{F}^{-1}$이 쌍대공간의 무차별곡선 $\hat{q}^o$상에 존재한다. 이 점의 접선의 기울기는 $\hat{r}^o$이다. 그러면 2개의 쌍대점 사이에는 쌍대 약수량효과의 방정식 $\hat{\hat{r}}^o = g(\hat{r}^o)$의 구체적인 형태로서

$$\hat{\hat{r}}^o = \frac{1}{\hat{r}^o}\frac{\hat{\hat{e}}^o}{1-\hat{\hat{e}}^o}\frac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o}\Omega^2 \tag{18}$$

가 유일하게 존재한다.

증명 : 부록의 증명 2가 제공한다.

정리 2의 의미는 다음과 같다. 본원공간에서 2개의 무차별곡선 $\hat{Q}^o$와 $\hat{\hat{Q}}^o$가 알려져 있다고 하자. 이제 점 $\hat{F}$의 위치가 무차별곡선 $\hat{Q}^o$상에 주어져 있다고 하자. 이 때 점 $\hat{F}$에서 접선의 기울기 $\hat{p}^o$도 주어진다. 평균치의 크기가 $\hat{Q}^o$에서 $\hat{\hat{Q}}^o$로 변할 때 점 $\hat{F}$의 위치는 점 $\hat{\hat{F}}$로 이동하는데 이 때 식 (17)에 의해서 점 $\hat{\hat{F}}$에 접하는 접선의 기울기 $\hat{p}^o$가 유일하게 결정되고 따라서 점 $\hat{\hat{F}}$의 위치도 유일하게 결정된다.

정리 2에 의해서 약수량효과가 발생할 때 본원공간과 쌍대공간에서 무차별곡선의 중심(center)이 이동한다. 양 공간에서 서로 일치하는 약수량효과가 각각 유일하므로 양 공간에서 무차별곡선 중심의 이동 사이에는 다음과 같은 중심의 전환성 정리가 성립한다.

정리 3 무차별곡선 중심의 이동은 양 공간에서 변수의 전환성을 만족시킨다. 다른 말로 표현하면 본원공간에서 무차별곡선 중심의 이동거리의 기울기의 절대치 $|\Delta|$는 쌍대공간에서 무차별곡선 중심의 이동거리의 기울기의 절대치의 역수 $\frac{1}{|\Omega|}$이다. 즉

$$|\Delta||\Omega| = 1 \tag{19}$$

이다.

증명 : 부록의 증명 3이 제공한다.

식 (19)의 관계는 $\hat{\hat{Q}}^o \hat{\hat{q}}^o = 1$이나 $\hat{Q}^o \hat{q}^o = 1$처럼 본원공간과 쌍대공간 사이의 역관계인 변수전환성을 공통적으로 잘 드러내고 있다. 또 하나의 공통점은 $\hat{\hat{Q}}^o$, $\hat{Q}^o$, $\hat{\hat{q}}^o$, $\hat{q}^o$의 성격상 무한대(∞)나 영(0)이 될 수 없는 것처럼 Δ와 Ω 또한 무한대(∞)나 영(0)이 되는 경우를 배제한다. 따라서 조건

$$0 < |\Delta| < \infty \text{와} \qquad 0 < |\Omega| < \infty \tag{20}$$

이 성립하여야 한다. 다른 점은 무차별곡선의 성격상 $\hat{\hat{Q}}^o$, $\hat{Q}^o$, $\hat{\hat{q}}^o$, $\hat{q}^o$는 경제학적으로는 양수이어야만 하므로 $\hat{\hat{Q}}^o \hat{\hat{q}}^o = 1$이고 $\hat{Q}^o \hat{q}^o = 1$인데 대하여 Δ와 Ω는 양수뿐만 아니라 음수일 수도 있으므로 $|\Delta||\Omega| = 1$, 즉 $\Delta\Omega = \pm 1$이라는 점이다. 이 부호는 사전적으로 알려져 있지 않다.

정리 4 약수량효과는 수량효과의 일반적 형태이다. 즉, 약수량효과 정의식 $\hat{\hat{p}}^o = \frac{1}{\hat{p}^o} \frac{\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o} \frac{\hat{\varepsilon}^o}{1-\hat{\varepsilon}^o} \Delta^2$과 $\hat{\hat{r}}^o = \frac{1}{\hat{r}^o} \frac{\hat{\hat{e}}^o}{1-\hat{\hat{e}}^o} \frac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o} \Omega^2$에 수량효과 정의식 $\hat{p}^o = \hat{\hat{p}}^o$와 $\hat{r}^o = \hat{\hat{r}}^o$을 적용하면 자명한 풀이 $\hat{X}_1 = \hat{X}_2$와 $\hat{\hat{X}}_1 = \hat{\hat{X}}_2$이다.

증명 : 부록의 증명 4가 제공한다.

정리 4는 정리 1의 수량효과 불가능성의 또 다른 증명이다. 정리 4에 의하면 수량효과 불가능성은 약수량효과 가능성의 특수한 경우($\hat{X}_1 = \hat{X}_2$이고 동시에 $\hat{\hat{X}}_1 = \hat{\hat{X}}_2$인 경우)임을 설명하고 있다. 거꾸로 말하면 약수량효과 가능성은 강수량효과 불가능성의 일반적인 형태($\hat{X}_1 \neq \hat{X}_2$이고 동시에 $\hat{\hat{X}}_1 \neq \hat{\hat{X}}_2$인 경우)이다.

Ⅶ

이상에서 선간이동에서 일반적으로 수량효과 불가능을 증명하였다. 본원과 쌍대의 양 공간에서 동시에 수량효과가 불가능하면 양 공간에서 '동시에' 확장선의 정의와 비용함수의 정의도 불가능하다.

〈부 록〉

증명 1 : 먼저 본원공간부터 조사한다. 본원공간을 나타내는 식 (2)와 식 (3)에서

$$\hat{X}_1 - \hat{\varepsilon}^o \hat{Q}^o = (1-\hat{\varepsilon}^o)\hat{Q}^o\left(\frac{\hat{X}_1}{\hat{X}_2}\right) \quad \text{(A 1-1)}$$

$$\hat{X}_2 - (1-\hat{\varepsilon}^o)\hat{Q}^o = \hat{\varepsilon}^o \hat{Q}^o\left(\frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1}\right) \quad \text{(A 1-2)}$$

이 성립한다. 마찬가지로 식 (8)과 식 (9)에서

$$\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{\varepsilon}}^o \hat{\hat{Q}}^o = (1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o)\hat{\hat{Q}}^o\left(\frac{\hat{\hat{X}}_1}{\hat{\hat{X}}_2}\right) \quad \text{(A 1-3)}$$

$$\hat{\hat{X}}_2 - (1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o)\hat{\hat{Q}}^o = \hat{\hat{\varepsilon}}^o \hat{\hat{Q}}^o\left(\frac{\hat{\hat{X}}_2}{\hat{\hat{X}}_1}\right) \quad \text{(A 1-4)}$$

이 성립한다. 수량효과의 정의식 (11)을 적용하면 식 (A 1-1)~(A 1-4)로부터

$$\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{\varepsilon}}^o \hat{\hat{Q}}^o = \frac{\hat{\hat{X}}_2 - (1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o)\hat{\hat{Q}}^o}{\hat{X}_2 - (1-\hat{\varepsilon}^o)\hat{Q}^o}(\hat{X}_1 - \hat{\varepsilon}^o \hat{Q}^o) \qquad \text{(A 1-5)}$$

을 얻는다. 등호의 오른쪽 항의 분자와 분모에 각각 식 (A 1-4)와 식 (A 1-2)를 대입하고 식 (3)과 식 (9)에 수량효과 정의식 (11)을 대입하여 정리하면

$$\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{\varepsilon}}^o \hat{\hat{Q}}^o = \left(\frac{\hat{\hat{\varepsilon}}^o(1-\hat{\varepsilon}^o)}{(1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o)\hat{\varepsilon}^o}\right)^{1/2}\left(\frac{(1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o)\hat{\hat{Q}}^o}{(1-\hat{\varepsilon}^o)\hat{Q}^o}\right)^{1/2}(\hat{X}_1 - \hat{\varepsilon}^o \hat{Q}^o) \qquad \text{(A 1-6)}$$

이번에는 쌍대공간을 조사할 차례이다. 쌍대공간을 나타내는 식 (1)과 식 (7)에서 각각

$$\hat{\hat{Q}}^o = \hat{\hat{e}}^o(\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{X}}_2) + \hat{\hat{X}}_2 \qquad \text{(A 1-7)}$$

$$\hat{\hat{Q}}^o = (1-\hat{\hat{e}}^o)(\hat{\hat{X}}_2 - \hat{\hat{X}}_1) + \hat{\hat{X}}_1 \qquad \text{(A 1-8)}$$

$$\hat{Q}^o = \hat{e}^o(\hat{X}_1 - \hat{X}_2) + \hat{X}_2 \qquad \text{(A 1-9)}$$

$$\hat{Q}^o = (1-\hat{e}^o)(\hat{X}_2 - \hat{X}_1) + \hat{X}_1 \qquad \text{(A 1-10)}$$

이 주어진다. 쌍대공간의 수량효과 정의식 (12)를 식 (A 1-7)~(A 1-10)에 대입하여 정리하면

$$\frac{\hat{\hat{Q}}^o - \hat{\hat{X}}_2}{\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{Q}}^o}\left(\frac{\hat{\hat{X}}_1}{\hat{\hat{X}}_2}\right)^2 = \frac{\hat{Q}^o - \hat{X}_2}{\hat{X}_1 - \hat{Q}^o}\left(\frac{\hat{X}_1}{\hat{X}_2}\right)^2 \qquad \text{(A 1-11)}$$

이 성립한다. 식 (A 1-3)을 약간 변경시키면

$$\hat{\hat{Q}}^o - \hat{\hat{X}}_2 = \frac{\hat{\hat{Q}}^o(\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{\varepsilon}}^o \hat{\hat{Q}}^o) - (1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o)\hat{\hat{Q}}^o \hat{\hat{X}}_1}{\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{\varepsilon}}^o \hat{\hat{Q}}^o} \qquad \text{(A 1-12)}$$

이고 식 (A 1-1)도 같은 방법으로 변형시키면

$$\hat{Q}^{o} - \hat{X}_2 = \frac{\hat{Q}^{o}(\hat{X}_1 - \hat{\varepsilon}^{o}\hat{Q}^{o}) - (1-\hat{\varepsilon}^{o})\hat{Q}^{o}\hat{X}_1}{\hat{X}_1 - \hat{\varepsilon}^{o}\hat{Q}^{o}} \tag{A 1-13}$$

이다. 식 (A 1-12)~(A 1-13)을 식 (A 1-11)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{(\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{\varepsilon}}^{o}\hat{\hat{Q}}^{o})\hat{\hat{\varepsilon}}^{o}\hat{\hat{Q}}^{o} - (1-\hat{\hat{\varepsilon}}^{o})\hat{\hat{Q}}^{o}\hat{\hat{\varepsilon}}^{o}\hat{\hat{Q}}^{o}}{(\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{\varepsilon}}^{o}\hat{\hat{Q}}^{o}) - (1-\hat{\hat{\varepsilon}}^{o})\hat{\hat{Q}}^{o}}\right] \\
&\left[\frac{\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{\varepsilon}}^{o}\hat{\hat{Q}}^{o}}{(1-\hat{\hat{\varepsilon}}^{o})\hat{\hat{Q}}^{o}}\right]^2 \left[\frac{1}{\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{\varepsilon}}^{o}\hat{\hat{Q}}^{o}}\right] \\
= &\left[\frac{(\hat{X}_1 - \hat{\varepsilon}^{o}\hat{Q}^{o})\hat{\varepsilon}^{o}\hat{Q}^{o} - (1-\hat{\varepsilon}^{o})\hat{Q}^{o}\hat{\varepsilon}^{o}\hat{Q}^{o}}{(\hat{X}_1 - \hat{\varepsilon}^{o}\hat{Q}^{o}) - (1-\hat{\varepsilon}^{o})\hat{Q}^{o}}\right] \\
&\left[\frac{\hat{X}_1 - \hat{\varepsilon}^{o}\hat{Q}^{o}}{(1-\hat{\varepsilon}^{o})\hat{Q}^{o}}\right]^2 \left[\frac{1}{\hat{X}_1 - \hat{\varepsilon}^{o}\hat{Q}^{o}}\right]
\end{aligned} \tag{A 1-14}$$

가 된다. 이것을 정리하면

$$\begin{aligned}
&\left[(\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{\varepsilon}}^{o}\hat{\hat{Q}}^{o})\hat{\hat{\varepsilon}}^{o}\hat{\hat{Q}}^{o} - (1-\hat{\hat{\varepsilon}}^{o})\hat{\hat{Q}}^{o}\hat{\hat{\varepsilon}}^{o}\hat{\hat{Q}}^{o}\right] \\
&\left[(\hat{X}_1 - \hat{\varepsilon}^{o}\hat{Q}^{o}) - (1-\hat{\varepsilon}^{o})\hat{Q}^{o}\right] \\
&\left[\frac{(1-\hat{\varepsilon}^{o})\hat{Q}^{o}}{(1-\hat{\hat{\varepsilon}}^{o})\hat{\hat{Q}}^{o}}\right]^2 \left[\frac{\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{\varepsilon}}^{o}\hat{\hat{Q}}^{o}}{\hat{X}_1 - \hat{\varepsilon}^{o}\hat{Q}^{o}}\right] \\
= &\left[(\hat{X}_1 - \hat{\varepsilon}^{o}\hat{Q}^{o})\hat{\varepsilon}^{o}\hat{Q}^{o} - (1-\hat{\varepsilon}^{o})\hat{Q}^{o}\hat{\varepsilon}^{o}\hat{Q}^{o}\right] \\
&\left[(\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{\varepsilon}}^{o}\hat{\hat{Q}}^{o}) - (1-\hat{\hat{\varepsilon}}^{o})\hat{\hat{Q}}^{o}\right]
\end{aligned} \tag{A 1-15}$$

식 (A 1-6)은 본원공간의 식이고 식 (A 1-15)는 쌍대공간의 식이다. 본원공간의 식 (A 1-6)을 쌍대공간의 식 (A 1-15)에 $(\hat{\hat{X}}_1 - \hat{\hat{\varepsilon}}^{o}\hat{\hat{Q}}^{o})$에 대하여 대입하여 정리하면

$$
\begin{aligned}
&(\hat{X}_1-\hat{\varepsilon}^o\hat{Q}^o)^2 \\
&-\left[(1-\hat{\varepsilon}^o)+(1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o)\left(\frac{\hat{\varepsilon}^o(1-\hat{\varepsilon}^o)}{\hat{\hat{\varepsilon}}^o(1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o)}\right)^{½}\right]\hat{Q}^o \\
&(\hat{X}_1-\hat{\varepsilon}^o\hat{Q}^o) \\
&+(1-\hat{\varepsilon}^o)(1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o)\left(\frac{\hat{\varepsilon}^o(1-\hat{\varepsilon}^o)}{\hat{\hat{\varepsilon}}^o(1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o)}\right)^{½}(\hat{Q}^o)^2=0
\end{aligned}
\tag{A 1-16}
$$

을 얻는다. 식 (A 1-16)은 이차방정식이다. 풀이는 2개이다.

$$\hat{X}_1=\hat{Q}^o \tag{A 1-17}$$

$$\hat{X}_1=\hat{\varepsilon}^o\left(1+\frac{\hat{\varepsilon}^o\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{(1-\hat{\varepsilon}^o)(1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o)}\right)^{½}\hat{Q}^o \tag{A 1-18}$$

풀이가 식 (A 1-17)인 경우에는 식 (2)에서

$$\hat{X}_1=\hat{X}_2=\hat{Q}^o \tag{A 1-19}$$

이고 식 (3)과 식 (8)에서 수량효과 정의식 (11)의 도움으로

$$\frac{\hat{\hat{X}}_2}{\hat{\hat{X}}_1}=\left(\frac{\hat{\varepsilon}^o(1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o)}{\hat{\hat{\varepsilon}}^o(1-\hat{\varepsilon}^o)}\right)^{½} \tag{A 1-20}$$

이 된다. 식 (A 1-20)을 식 (9)에 대입하면 $\hat{X}_1$과 $\hat{X}_2$를 구할 수 있다. 한편, 식 (1)과 식 (2)에서

$$\frac{\hat{\hat{X}}_2}{\hat{\hat{X}}_1}=\frac{\hat{e}^o(1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o)}{\hat{\hat{\varepsilon}}^o(1-\hat{e}^o)} \tag{A 1-21}$$

이다. 식 (A 1-20)과 식 (A 1-21)을 비교하면

$$\hat{\hat{e}}^{o} = \hat{\hat{\varepsilon}}^{o} \qquad \text{(A 1-22)}$$

이어야 한다. 이것은

$$\hat{\hat{X}}_1 = \hat{\hat{X}}_2 = \hat{\hat{Q}}^{o} \qquad \text{(A 1-23)}$$

를 의미한다. 풀이가 식 (A 1-18)일 때에도 마찬가지 방법으로 식 (A 1-19)와 식 (A 1-23)이 성립한다. 증명 끝.

증명 2 : 실수공간에서 $W^2 = X^2Y^2$가 성립하는 실수 W, X, Y가 항상 존재하므로 정의 (16)에 의하여

$$\Delta^2 = \left(\frac{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^{o}}{\hat{\hat{\varepsilon}}^{o}}\,\frac{1-\hat{\varepsilon}^{o}}{\hat{\varepsilon}^{o}}\right)^2 \hat{\Delta}^2$$

$$\Omega^2 = \left(\frac{1-\hat{\hat{e}}^{o}}{\hat{\hat{e}}^{o}}\,\frac{1-\hat{e}^{o}}{\hat{e}^{o}}\right)^2 \hat{\Omega}^2 \qquad \text{(A 2-1)}$$

를 만족하는 실수 $\hat{\Delta} = \dfrac{\left(\frac{\hat{\hat{q}}^{o}}{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^{o}}\right)-\left(\frac{\hat{q}^{o}}{1-\hat{\varepsilon}^{o}}\right)}{\left(\frac{\hat{\hat{q}}^{o}}{\hat{\hat{\varepsilon}}^{o}}\right)-\left(\frac{\hat{q}^{o}}{\hat{\varepsilon}^{o}}\right)}$와 $\hat{\Omega} = \dfrac{\left(\frac{\hat{\hat{Q}}^{o}}{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^{o}}\right)-\left(\frac{\hat{Q}^{o}}{1-\hat{\varepsilon}^{o}}\right)}{\left(\frac{\hat{\hat{Q}}^{o}}{\hat{\hat{\varepsilon}}^{o}}\right)-\left(\frac{\hat{Q}^{o}}{\hat{\varepsilon}^{o}}\right)}$가 반드시 존재한다. 동일한 실수공간에서 동일한 W에 대해 $W^2 = x^2y^2$가 성립하는 실수 $x \fallingdotseq X$와 $y \fallingdotseq Y$도 항상 존재하므로 식 (A 2-1)에 식 (3), 식 (9), 식 (6), 식 (10)을 대입할 때

$$\Delta^2 = \left(\frac{\hat{\hat{X}}_2{}'}{\hat{\hat{X}}_1{}'}\right)^2\left(\frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1}\right)^2$$

$$\Omega^2 = \left(\frac{\hat{\hat{x}}_2{}''}{\hat{\hat{x}}_1{}''}\right)^2\left(\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}\right)^2 \qquad \text{(A 2-2)}$$

를 만족하는 실수 $\frac{V_2'}{V_1'}$와 $\frac{k_2''}{k_1''}$도 항상 존재한다. 여기서

$$\frac{\hat{\hat{X}}_2'}{\hat{\hat{X}}_1'} = (\mu')\frac{\hat{\hat{X}}_2}{\hat{\hat{X}}_1}$$

$$\frac{\hat{\hat{x}}_2''}{\hat{\hat{x}}_1''} = \left(\frac{1}{\mu''}\right)\frac{\hat{\hat{x}}_2}{\hat{\hat{x}}_1} \qquad \text{(A 2-3)}$$

이고

$$\mu' = \frac{\hat{\hat{X}}_2}{\hat{\hat{X}}_1}\frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1}\frac{\hat{\Delta}}{\hat{\hat{p}}^o\hat{p}^o}$$

$$\frac{1}{\mu''} = \frac{\hat{\hat{x}}_2}{\hat{\hat{x}}_1}\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}\frac{\hat{\Omega}}{\hat{\hat{q}}^o\hat{q}^o} \qquad \text{(A 2-4)}$$

이다. 식 (A 2-1)~(A 2-4)를 정리하면

$$\hat{\hat{p}}^o\hat{p}^o = \frac{\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o}\frac{\hat{\varepsilon}^o}{1-\hat{\varepsilon}^o}\left(\frac{1}{\mu'}\frac{\hat{\hat{X}}_2'}{\hat{\hat{X}}_1'}\frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1}\right)^2 \qquad \text{(A 2-5)}$$

$$\hat{\hat{q}}^o\hat{q}^o = \frac{\hat{\hat{e}}^o}{1-\hat{\hat{e}}^o}\frac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o}\left(\mu''\frac{\hat{\hat{x}}_2''}{\hat{\hat{x}}_1''}\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}\right)^2 \qquad \text{(A 2-6)}$$

를 얻는다. (A 2-3)의 첫째 식은 본원공간에서 '동일' 무차별곡선상의 두 점 $S=[\hat{\hat{X}}_1, \hat{\hat{X}}_2]$와 $S'=[\hat{\hat{X}}_1', \hat{\hat{X}}_2']$의 관계이다. 이 본원관계와 정확하게 일치하는 쌍대관계가 쌍대공간에서 두 점 $S^{-1}=[\hat{\hat{x}}_1, \hat{\hat{x}}_2]$와 $(S')^{-1}=[\hat{\hat{x}}_1', \hat{\hat{x}}_2']$ 사이에 존재한다. 이 2개의 쌍대점은 '동일' 무차별곡선상에 존재해야 하므로 김학은 [4]의 정리 8에 의하여 $\mu'=1$이다. 마찬가지로 (A 2-3)의 둘째 식은 쌍대공간에서 '동일' 무차별곡선상의 두 점 $S^{-1}=[\hat{\hat{x}}_1, \hat{\hat{x}}_2]$와 $(S'')^{-1}=[\hat{\hat{x}}_1'', \hat{\hat{x}}_2'']$의 관계이다. 이 쌍대관계와 정확하게 일치하는 본원관계가 본원공간에서

두 점 $S=[\hat{\hat{X}}_1, \hat{\hat{X}}_2]$와 $S''=[\hat{\hat{X}}_1'', \hat{\hat{X}}_2'']$ 사이에 존재한다. 이 2개의 본원점은 '동일' 무차별곡선상에 존재해야 하므로 김학은 [4]의 정리 8에 의하여 $\mu''=1$이다. 이 결과를 식 (A 2-2)~(A 2-3)과 식 (A 2-5)~(A 2-6)에 적용하면

$$\hat{\hat{p}}^o \hat{p}^o = \frac{\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o} \frac{\hat{\varepsilon}^o}{1-\hat{\varepsilon}^o} \Delta^2$$

$$\hat{\hat{q}}^o \hat{q}^o = \frac{\hat{\hat{e}}^o}{1-\hat{\hat{e}}^o} \frac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o} \Omega^2 \qquad \text{(A 2-7)}$$

이 된다. 증명 끝.

증명 3 : 식 (A 2-6)~(A 2-7)을 식 (A 2-2)에 대입하면 본원공간에서 무차별곡선 중심의 이동거리의 기울기와 쌍대공간에서 무차별곡선 중심의 이동거리의 기울기는

$$\Delta^2 = \left(\frac{\hat{\hat{X}}_2}{\hat{\hat{X}}_1} \frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1}\right)^2, \qquad \Omega^2 = \left(\frac{\hat{\hat{x}}_2}{\hat{\hat{x}}_1} \frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}\right)^2 \qquad \text{(A 3-1)}$$

이므로 식 (19)가 성립한다. 증명 끝.

증명 4 : $\hat{\hat{p}}^o = \hat{p}^o$와 $\hat{\hat{r}}^o = \hat{r}^o$이면 식 (19)의 도움으로 식 (17)~(18)은 $\frac{\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o} \frac{\hat{\hat{e}}^o}{1-\hat{\hat{e}}^o} = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{1-\hat{\varepsilon}^o} \frac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o}$이다. 이 결과는 연립방정식 체계 I에서 $\hat{\hat{p}}^o = \hat{p}^o$와 $\hat{\hat{r}}^o = \hat{r}^o$일 때 식 (9), 식 (3), 식 (6), 식 (10)으로부터 구한 결과와 동일하다. 따라서, 연립방정식 체계 I의 결과 식 (13)처럼 $\hat{\hat{X}}_1 = \hat{\hat{X}}_2$이고 $\hat{X}_1 = \hat{X}_2$이다. 증명 끝.

▣ 참 고 문 헌 ▣

1. 김학은, "유통속도의 부문별 분할 I", 「연세경제연구」, V(2), 1998, pp. 101～128.
2. ______, "수표경제와 어음경제에 있어서의 적정화폐구간", 「經濟學硏究」, 47(3), 1999, pp. 277～308.
3. ______, "사회적 선택의 2차 불가능성에 관한 실험적 소고", 「연세경제연구」, Ⅶ(1), 2000, pp. 87～100.
4. ______, "선형함수의 수학적 특성과 선상이동 불가능성", 「연세경제연구」, Ⅶ(2), 2000, pp. 147～163.
5. ______, "화폐유통속도의 수학적 분할", 「經濟學硏究」, 49(1), 2001, pp. 273～303.