연세경제연구 제 Ⅶ권, 제2호
Yonsei Economic Studies, Vol. Ⅶ, No. 2 (September 2000)

# 선형결합의 수학적 특성과 선상이동 불가능성

김 학 은

경제학에서 취급하는 좌표는 대부분 단위기간에 측정하는 변수의 크기로 구성되어 있다. 그러나 이렇게 정의되는 변수의 역수인 단위크기를 측정하는 기간으로 좌표를 구성하여도 분석의 결과는 동일하여야 한다. 전자를 본원공간이라 하면 후자를 쌍대공간으로 부를 수 있다. 하나의 공간에서 직각쌍곡선은 다른 공간에서는 직선이 된다. 따라서, 본원공간에서 정의되는 하나의 직각쌍곡선상에서 서로 다른 두 점 사이의 선상이동은 쌍대공간에서는 하나의 직선상에서 서로 다른 두 점 사이의 선상이동으로 정의될 수 밖에 없다. 따라서, 양 공간에서 동시에 직각쌍곡선상의 선상이동을 정의할 수 없다. 이것은 본원공간에서의 대체탄력성은 쌍대공간에서는 정의되지 않는다는 것을 의미한다.

**1.** 경제학에서 흔히 사용하는 변수 사이의 선형결합(linear combination)에는 흥미로운 특성이 내재되어 있다. 본 연구는 선형결합의 알려지지 않은 특성에 관한 연구로서 이 특성을 이용하여 선상이동(線上移動, a movement along a line) 불가능성을 증명한다. 선상이동의 대표적인 예로서 등량곡선(iso-quant curve)의 파라메타가 일정하게 주어졌을 때 동일 등량곡선상의 두 점 사이의 이동을 설명하는 힉스 대체효과(the Hicks substitution effect)를 들 수 있다. 힉스 대체효과의 정의가 불가능하면 대체탄력성의 정의도 불가능하다. 세 개의 유량변수 $\hat{Q}$, $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$ 사이에 다음과 같은 선형결합을 생각하자.

$$\hat{Q} = \hat{e}\hat{X}_1 + (1-\hat{e})\hat{X}_2 \tag{1}$$

연세대학교 경제학과, 서울시 서대문구 신촌동 134, 120-749.

선형결합 (1)에서 $\hat{e}$는 가중치이고 $\hat{Q}$는 평균치이다. 이 때 가중치 $\hat{e}^o$와 평균치 $\hat{Q}^o$가 일정한 크기로 주어지면 선형결합 (1)은 다음과 같은 산술평균

$$\hat{Q}^o = \hat{e}^o\hat{X}_1 + (1-\hat{e}^o)\hat{X}_2 \tag{2}$$

가 되는데 평균치 $\hat{Q}^o$를 만족하는 두 변수 $\hat{X}_1$과 $\hat{X}_2$의 조합은 무수히 많다.

**2.** 경제학의 모든 유량변수는 단위시간에 측정하는 크기이다.[1] 따라서, 그의 역수는 단위크기에 측정하는 기간 또는 시간(period of time)이다. 예를 들면, 단위시간에 임대하는 주차면적이 있는데 그의 역수는 단위면적을 임대하는 주차시간이다. 생산에 있어서 단위시간에 고용하는 노동량의 역수는 단위 고용량을 수요하는 시간이고 임금은 이 시간을 기준으로 지불되는 단위 고용량의 시간에 대한 가격이다. 아마도 가장 좋은 예는 단위시간에 화폐의 회전수를 측정하는 유통속도(transac-tion velocity) $V$인데 그의 역수는 화폐가 단위 회전하는데 걸리는 유통기간(transac-tion period) 또는 유통시간(transaction time)으로서[2] 흔히 마샬의 $k$라고 불리며 $Vk = 1$이다. 유통속도와 관련한 문제를 유통속도로 분석하나 유통시간으로 분석하나 결과는 대수적으로나 기하학적으로 모두 일치하므로 유통속도와 유통시간 가운데 어떤 개념을 택하든지 상관없다. 이상의 논리를 산술평균 (2)에 적용하기 위하여 변수전환의 정의 $\hat{Q}^o\hat{q}^o = 1, \hat{X}_1\hat{x}_1 = 1, \hat{X}_2\hat{x}_2 = 1$을 사용한다. 그러면 다음의 정리가 성립한다.

**정리 1** 산술평균의 전환성 : 양의 좌표 $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$에 일정한 크기의 가중치 $\hat{e}^o$와 평균치 $\hat{Q}^o$로 정의되는 하나의 산술평균(arithmetic mean)

$$\hat{Q}^o = \hat{e}^o\hat{X}_1 + (1-\hat{e}^o)\hat{X}_2 \tag{3}$$

가 주어지면 동일 좌표상에 반드시 不定(indeterminated)의 가중치 $\hat{\varepsilon}$로 정의되는 다음의 조화평균(harmonic mean)

$$\frac{1}{\hat{Q}^o} = \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{X}_1} + \frac{1-\hat{\varepsilon}}{\hat{X}_2} \tag{4}$$

1) 저량변수도 그를 측정하는 장기의 측면에서 보면 유량변수이다.
2) 대표적인 단위가 화폐가 1회전하는 데 걸리는 주 또는 개월이다.

이 무수히 존재하며 일정 평균치 $\hat{Q}^o$에 대해 무한수의 가중치 $\hat{\epsilon}$가 존재한다.

증명 : 가중치 $\hat{e}^o$와 평균치 $\hat{Q}^o$가 주어졌을 때 변수전환을 이용하면 산술평균 (3)은 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$의 좌표에서 조화평균

$$\frac{1}{\hat{q}^o} = \frac{\hat{e}^o}{\hat{x}_1} + \frac{1 - \hat{e}^o}{\hat{x}_2} \tag{5}$$

으로 전환된다. 조화평균 (5)를 $\hat{e} = \hat{e}^o$와 $\hat{q} = \hat{q}^o$에서 $\hat{x}_1$과 $\hat{x}_2$에 대하여 각각 편미분하여 정리하면

$$\hat{\epsilon}_1 = \frac{\delta \hat{q}}{\delta \hat{x}_1}\bigg|_{\hat{q}^o} \frac{\hat{x}_1}{\hat{q}^o} = \hat{e}^o \frac{\hat{q}^o}{\hat{x}_1} \tag{6}$$

$$\hat{\epsilon}_2 = \frac{\delta \hat{q}}{\delta \hat{x}_2}\bigg|_{\hat{q}^o} \frac{\hat{x}_2}{\hat{q}^o} = (1-\hat{e}^o) \frac{\hat{q}^o}{\hat{x}_2} \tag{7}$$

을 얻는다. 여기서 $\hat{\epsilon}_1$와 $\hat{\epsilon}_2$는 조화평균의 식 (5)에서 탄력성이다. 식 (6)과 식 (7)로부터 선형결합(linear combination)

$$\hat{q}^o = \hat{\epsilon}_1 \hat{x}_1 + \hat{\epsilon}_2 \hat{x}_2 \tag{8}$$

가 성립한다. 한편, 조화평균의 식 (4)는 $\hat{x}_1$과 $\hat{x}_2$에 대하여 1차 동차함수이므로 오일러 정리(Euler theorem)를 적용하면

$$\hat{q}^o = \frac{\delta \hat{q}}{\delta \hat{x}_1}\bigg|_{\hat{q}^o} \hat{x}_1 + \frac{\delta \hat{q}}{\delta \hat{x}_2}\bigg|_{\hat{q}^o} \hat{x}_2 = (\hat{\epsilon}_1 + \hat{\epsilon}_2)\hat{q}^o \tag{9}$$

이다. 이 과정에서 식 (6)과 식 (7)을 사용하였다. 따라서 식 (8)은

$$\hat{q}^o = \hat{\epsilon}\hat{x}_1 + (1 - \hat{\epsilon})\hat{x}_2 \tag{10}$$

이 된다. 여기서 $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_1$이고 $1-\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_2$이다. 식 (10)을 변수전환하면

$$\frac{1}{\hat{Q}^{o}} = \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{X}_1} + \frac{1-\hat{\varepsilon}}{\hat{X}_2} \tag{11}$$

로 되는데 이것이 바로 식 (4)이다. 이 때 가중치 $\hat{\varepsilon}$는 식 (6)에 의해서 $\hat{x}_1$의 함수이므로 정해지지 않고 일정 평균치 $\hat{Q}^{o}$에 대해 식 (11)은 좌표 $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$상에 무수히 많다. 증명 끝.

식 (5)는 중심(center)이 $O_{\hat{q}} = [\hat{e}^{o}\hat{q}^{o}, (1-\hat{e}^{o})\hat{q}^{o}]$인 직각쌍곡선으로서 조화평균의 정의이다. 조화평균의 예로서 CES 생산함수 $\left(\frac{A}{\bar{q}}\right)^{\rho} = \frac{\hat{e}}{\bar{x}_1^{\rho}} + \frac{1-\hat{e}}{\bar{x}_2^{\rho}}$을 들 수 있는데 여기에 $\left(\frac{A}{\bar{q}}\right)^{\rho} = \hat{q}^{o}, \bar{x}_1^{\rho} = \hat{x}_1, \bar{x}_2^{\rho} = \hat{x}_2$를 대입하면 식 (4)는 CES 생산함수에서 기술수준과 생산량이 일정하게 주어진 등량곡선의 정의식이 된다. 또 하나의 예는 코브-다그라스 생산함수 $Q = AX_1^{\hat{e}}X_2^{(1-\hat{e})}$이다. 여기에 $\log(Q/A) = \hat{Q}^{o}$, $\log X_1 = \hat{X}_1$, $\log X_2 = \hat{X}_2$, $\hat{e} = \hat{e}^{o}$를 도입한 후 변수전환하면 역시 등량곡선 $\frac{1}{\hat{q}^{o}} = \frac{\hat{e}^{o}}{\hat{x}_1} + \frac{1-\hat{e}^{o}}{\hat{x}_2}$가 된다.

**정리 2** 조화평균의 전환성 : 양의 좌표 $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$에 일정한 크기의 가중치 $\hat{\varepsilon}^{o}$와 평균치 $\hat{Q}^{o}$로 정의되며 중심이 $O_{\hat{Q}} = [\hat{\varepsilon}^{o}\hat{Q}^{o}, (1-\hat{\varepsilon}^{o})\hat{Q}^{o}]$인 하나의 조화평균

$$\frac{1}{\hat{Q}^{o}} = \frac{\hat{\varepsilon}^{o}}{\hat{X}_1} + \frac{1-\hat{\varepsilon}^{o}}{\hat{X}_2} \tag{12}$$

이 주어지면 동일 좌표상에 반드시 부정(不定)의 가중치 $\hat{e}$로 정의되는 다음의 산술평균

$$\hat{Q}^{o} = \hat{e}\hat{X}_1 + (1-\hat{e})\hat{X}_2 \tag{13}$$

이 무수히 존재하며 일정 평균치 $\hat{Q}^{o}$에 대해 무한수의 가중치 $\hat{e}$가 존재한다.

증명 : 하나의 조화평균의 식 (12)를 $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^{o}$와 $\hat{Q} = \hat{Q}^{o}$에서 $\hat{X}_1$과 $\hat{X}_2$에 대하여 각각 편미분하여 정리하면

$$\hat{e}_1 = \frac{\delta \hat{Q}}{\delta \hat{X}_1}\bigg|_{\hat{Q}^o} \frac{\hat{X}_1}{\hat{Q}^o} = \hat{\varepsilon}^o \frac{\hat{Q}^o}{\hat{X}_1} \tag{14}$$

$$\hat{e}_2 = \frac{\delta \hat{Q}}{\delta \hat{X}_2}\bigg|_{\hat{Q}^o} \frac{\hat{X}_2}{\hat{Q}^o} = (1-\hat{\varepsilon}^o) \frac{\hat{Q}^o}{\hat{X}_2} \tag{15}$$

을 얻는다. 여기서 $\hat{e}_1$과 $\hat{e}_2$는 식 (12)에서 $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^o$일 때 탄력성이다. 따라서 식 (12)에서 $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^o$일 때 다음의 선형결합

$$\hat{Q}^o = \hat{e}_1 \hat{X}_1 + \hat{e}_2 \hat{X}_2 \tag{16}$$

가 성립한다. 한편, 조화평균의 식 (12)는 $\hat{X}_1$과 $\hat{X}_2$에 대하여 1차 동차함수이므로 오일러 정리(Euler theorem)를 적용하면

$$\hat{Q}^o = \frac{\delta \hat{Q}}{\delta \hat{X}_1}\bigg|_{\hat{Q}^o} \hat{X}_1 + \frac{\delta \hat{Q}}{\delta \hat{X}_2}\bigg|_{\hat{Q}^o} \hat{X}_2 = (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)\hat{Q}^o \tag{17}$$

이 된다. 이 과정에서 식 (14)와 식 (15)를 사용하였다. 그러므로 식 (16)과 식 (17)에서

$$\hat{Q}^o = \hat{e}\hat{X}_1 + (1-\hat{e})\hat{X}_2 \tag{18}$$

이 성립한다. 여기서 $\hat{e} = \hat{e}_1$이다. 식 (18)이 $\hat{Q} = \hat{Q}^o$일 때 식 (1)이다. 이 때 가중치 $\hat{e}$는 식 (14)에 의해서 $\hat{X}_1$의 함수이므로 일정 평균치 $\hat{Q}^o$에 대해 식 (18)은 좌표 ($\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$)상에서 무수히 많다. 증명 끝.

**3.** 단위시간에 측정하는 좌표 ($\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$)를 본원공간(primal space)이라 부르고, 그의 역수로서 단위크기에 측정하는 좌표 ($\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$)를 그의 쌍대공간(dual space)이라고 부르자. 이 호칭은 편의상 정한 것으로 그 밖에 별 다른 의미는 없다. 정리 1과 정리 2를 증명하는 과정에서 우리는 쌍대공간이 본원공간의 투영이고 그 역도 성립함을 보았다. 그러면 다음의 정의가 성립한다.

**정의 1** 전환성 정의

본원공간 ($\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$)상의 하나의 산술평균 $\hat{Q}^o[\hat{e}^o]$ : $\hat{Q}^o = \hat{e}^o\hat{X}_1 + (1-\hat{e}^o)\hat{X}_2$

을 쌍대공간 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$로 전환하면 하나의 조화평균 $\hat{q}^o[\hat{e}^o] : \frac{1}{\hat{q}^o} = \frac{\hat{e}^o}{\hat{x}_1} + \frac{1-\hat{e}^o}{\hat{x}_2}$이 되고, 쌍대공간 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$의 하나의 산술평균 $\hat{q}^o[\hat{\varepsilon}^o] : \hat{q}^o = \hat{\varepsilon}^o\hat{x}_1 + (1-\hat{\varepsilon}^o)\hat{x}_2$을 본원공간 $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$로 전환하면 하나의 조화평균 $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o] : \frac{1}{\hat{Q}^o} = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_1} + \frac{1-\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_2}$이 된다.

정의 1이 의미하는 것은 본원공간의 현상을 쌍대공간으로 표현하여도 그 결과가 동일하여야 한다는 뜻이므로 본원공간과 쌍대공간이 서로 투영하는 1 대 1의 관계에서 다음의 정리가 성립한다.

**정리 3** 전환의 일치성 : 평균치 $\hat{Q}^o$에 대해 가중치 $\hat{e}^o$와 $\hat{\varepsilon}^o$가 각 공간에서 일정하게 주어지고 $\hat{Q}^o\hat{q}^o = 1, \hat{X}_1\hat{x}_1 = 1, \hat{X}_2\hat{x}_2 = 1$이면 정리 1과 정리 2에 의해 각 공간에서 정의된 각각의 산술평균

$$\hat{Q}^o[\hat{e}^o] : \hat{Q}^o = \hat{e}^o\hat{X}_1 + (1-\hat{e}^o)\hat{X}_2 \tag{19}$$
$$\hat{q}^o[\hat{\varepsilon}^o] : \hat{q}^o = \hat{\varepsilon}^o\hat{x}_1 + (1-\hat{\varepsilon}^o)\hat{x}_2 \tag{20}$$

이 존재하고 본원공간의 풀이와 쌍대공간의 풀이는 대수적으로 정확하게 일치한다.

증명 : 정의 1에 의해 쌍대공간의 산술평균 (20)은 본원공간에서 조화평균이 되므로 이것을 본원공간을 정의하는 산술평균 (19)에 대입하면 다음의 두 풀이를 얻는다.

$$\hat{E} = (\hat{Q}^o, \hat{Q}^o), \qquad \hat{F} = \left(\frac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{e}^o}\hat{Q}^o, \frac{1-\hat{\varepsilon}^o}{1-\hat{e}^o}\hat{Q}^o\right) \tag{21}$$

정의 1에 의해 본원공간의 산술평균 (19)는 쌍대공간에서 조화평균이 되므로 이것을 쌍대공간을 정의하는 산술평균 (20)에 대입하면 다음의 두 풀이를 얻는다.

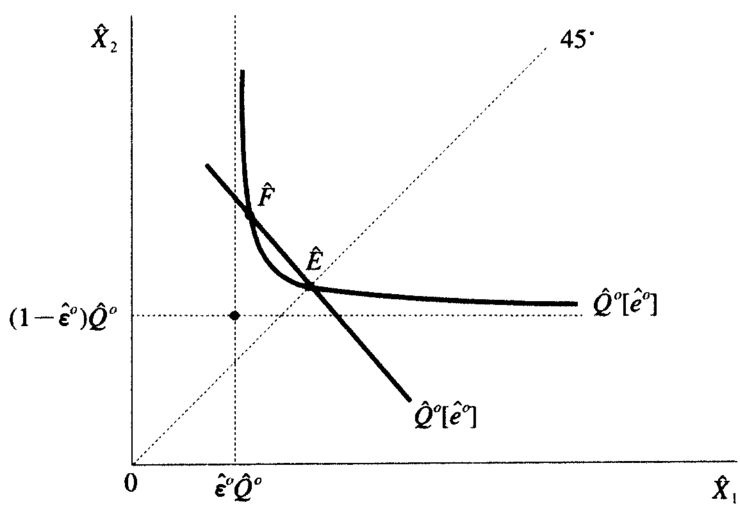
$$\hat{E}^{-1} = (\hat{q}^o, \hat{q}^o), \qquad \hat{F}^{-1} = \left(\frac{\hat{e}^o}{\hat{\varepsilon}^o}\hat{q}^o, \frac{1-\hat{e}^o}{1-\hat{\varepsilon}^o}\hat{q}^o\right) \tag{22}$$

$\hat{E}\hat{E}^{-1} = I$이고 $\hat{F}\hat{F}^{-1} = I$이므로 본원풀이 (21)은 쌍대풀이 (22)와 대수적으로 정

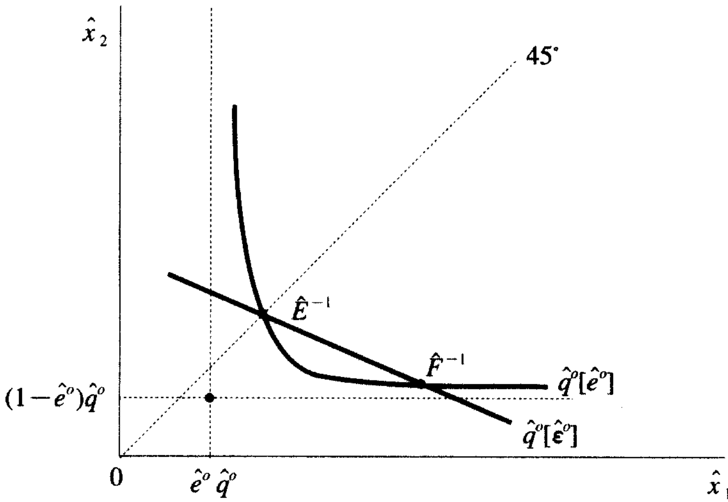
확하게 일치한다. 증명 끝.

정리 3을 기하학적으로 설명할 수 있다. 〈그림 1〉의 가로 좌표에는 $\hat{X}_1$을, 세로 좌표에는 $\hat{X}_2$를 측정한다. 식 (20)을 변수전환하면 본원공간에서 평균치 $\hat{Q}^o$와 가중치 $\hat{e}^o$가 일정한 산술평균 $\hat{Q}^o[\hat{e}^o]$이 되고, 식 (19)는 본원공간에서 평균치 $\hat{Q}^o$와 가중치 $\hat{\epsilon}^o$가 일정한 조화평균 $\hat{Q}^o[\hat{\epsilon}^o]$이 된다. 기하학적으로 본원공간에서 산술평균 $\hat{Q}^o[\hat{e}^o]$은 기울기가 $-\dfrac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o}$인 직선이 되고 조화평균 $\hat{Q}^o[\hat{\epsilon}^o]$은 중심의 좌표가 $[\hat{\epsilon}^o\hat{Q}^o, (1-\hat{\epsilon}^o)\hat{Q}^o]$인 직각쌍곡선이 된다. 두 선은 두 점 $\hat{F}$와 $\hat{E}$에서 만난다. 이 결과가 본원풀이 식 (21)이다. 한편, 〈그림 2〉의 가로 좌표에는 $\hat{x}_1$을 세로 좌표에는 $\hat{x}_2$를 측정한다. 식 (20)은 쌍대공간에서 평균치 $\hat{q}^o$와 가중치 $\hat{e}^o$가 일정한 조화평균 $\hat{q}^o[\hat{e}^o]$이고, 식 (19)를 변수전환하면 쌍대공간에서 평균치 $\hat{q}^o$와 가중치 $\hat{\epsilon}^o$가 일정한 산술평균 $\hat{q}^o[\hat{\epsilon}^o]$이 된다. 쌍대공간에서 산술평균 $\hat{q}^o[\hat{\epsilon}^o]$은 기울기가 $-\dfrac{\hat{\epsilon}^o}{1-\hat{\epsilon}^o}$인 직선이 되고 조화평균 $\hat{q}^o[\hat{e}^o]$은 중심의 좌표가 $[\hat{e}^o\hat{q}^o, (1-\hat{e}^o)\hat{q}^o]$인 직각쌍곡선이 된다. 두 선은 두 점 $\hat{F}^{-1}$과 $\hat{E}^{-1}$에서 만난다. 이 결과가 쌍대풀이 식 (22)이다. 본원풀이와 쌍대풀이는 기하학적으로 정확하게 일치한다.

〈그림 1〉 본원공간의 풀이



〈그림 2〉 쌍대공간의 풀이




**4.** 본원공간에서 가중치 $\hat{\varepsilon}^o$와 평균치 $\hat{Q}^o$가 일정하게 주어져 $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o]$로 표기하는 하나의 조화평균 $\frac{1}{\hat{Q}^o} = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_1} + \frac{1-\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_2}$과 가중치 $\hat{e}^o$와 평균치 $\hat{Q}^o$가 일정하게 주어져 $\hat{Q}^o[\hat{e}^o]$로 표기하는 하나의 산술평균 $\hat{Q}^o = \hat{e}^o\hat{X}_1 + (1-\hat{e}^o)\hat{X}_2$을 생각하자. 그리고 풀이식 (19)처럼 이 두 선이 만나는 점 $\hat{E}$와 점 $\hat{F}$ 가운데 자명한 풀이 점 $\hat{E}$을 배제하면 점 $\hat{F}$만 남는다. 다음 정리가 성립한다.

**정리 4** 가중치 정리 : 본원공간에서 조화평균 $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o]$의 가중치 $\hat{\varepsilon}^o$은 쌍대공간에서 조화평균 $\hat{q}^o[\hat{e}^o]$의 탄력성이고, 쌍대공간에서 조화평균 $\hat{q}^o[\hat{e}^o]$의 가중치 $\hat{e}^o$은 본원공간에서 조화평균 $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o]$의 탄력성이다.

증명 : 풀이식 (21)에 의하면 점 $\hat{F}$에서 $\hat{X}_1^o = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{e}^o}\hat{Q}^o$이므로 식 (19)와 식 (20)에서 다음이 성립한다.

$$\hat{e}^o = \hat{\varepsilon}^o\left(\frac{\hat{Q}^o}{\hat{X}_1^o}\right) = \frac{d\hat{Q}}{d\hat{X}_1}\Bigg|_{\hat{X}_1^o,\hat{Q}^o}^{\hat{Q}[\hat{\varepsilon}^o]}\left(\frac{\hat{X}_1^o}{\hat{Q}^o}\right) \tag{23}$$

쌍대공간의 조화평균(본원공간의 산술평균)의 가중치 $\hat{e}^o$는 본원공간의 조화평균 식

(19)의 탄력성이다. 마찬가지 방법으로 풀이식 (22)에 의하면 점 $\hat{F}^{-1}$에서 $\hat{x}_1^o = \frac{\hat{e}^o}{\hat{\epsilon}^o}\hat{q}^o$ 이므로 식 (19)와 식 (20)에서 다음이 성립한다.

$$\hat{\epsilon}^o = \hat{e}^o\left(\frac{\hat{q}^o}{\hat{x}_1^o}\right) = \frac{d\hat{q}}{d\hat{x}_1}\Bigg|_{\hat{x}_1^o,\,\hat{q}^o}^{\hat{q}[\hat{e}^o]}\left(\frac{\hat{x}_1^o}{\hat{q}^o}\right) \tag{24}$$

본원공간의 조화평균의 가중치 $\hat{\epsilon}^o$은 쌍대공간의 조화평균(본원공간의 산술평균) 식 (20)의 탄력성이 된다. 증명 끝.

**정리 5** 기여율 정리 1 : 본원공간에서 산술평균 $\hat{Q}^o[\hat{e}^o]$의 가중치 $\hat{e}^o$는 평균치 $\hat{Q}^o$에 대한 이 평균치를 구성하는 $\hat{X}_1$의 기여도의 비율이고 가중치 $1-\hat{e}^o$는 평균치 $\hat{Q}^o$에 대한 이 평균치를 구성하는 $\hat{X}_2$의 기여도의 비율이다.

증명 : 조화평균 $\hat{Q}^o[\hat{\epsilon}^o]$은 1차 동차이므로 다음이 성립한다.

$$\hat{Q}^o = \frac{d\hat{Q}}{d\hat{X}_1}\Bigg|_{\hat{X}_1^o,\,\hat{Q}^o}^{\hat{Q}[\hat{\epsilon}^o]}\hat{X}_1^o + \frac{d\hat{Q}}{d\hat{X}_2}\Bigg|_{\hat{X}_2^o,\,\hat{Q}^o}^{\hat{Q}[\hat{\epsilon}^o]}\hat{X}_2^o \tag{25}$$

양변을 $\hat{Q}^o$로 나누어 주면 식 (23)에서

$$\hat{e}^o = \frac{d\hat{Q}}{d\hat{X}_1}\Bigg|_{\hat{Q}^o,\,\hat{X}_1^o}^{\hat{Q}[\hat{\epsilon}^o]}\frac{\hat{X}_1^o}{\hat{Q}^o} \tag{26}$$

$$1 - \hat{e}^o = \frac{d\hat{Q}}{d\hat{X}_2}\Bigg|_{\hat{Q}^o,\,\hat{X}_1^o}^{\hat{Q}[\hat{\epsilon}^o]}\frac{\hat{X}_2^o}{\hat{Q}^o} \tag{27}$$

이다. 증명 끝.

기여율의 예로서 생산함수에서 소득분배율을 들 수 있다. 기여율은 쌍대공간에서도 정의된다.

**정리 6** 기여율 정리 2 : 쌍대공간에서 산술평균 $\hat{q}^o[\hat{\epsilon}^o]$의 가중치 $\hat{\epsilon}^o$는 평균치 $\hat{q}^o$에 대한 이 평균치를 구성하는 $\hat{x}_1$의 기여도의 비율이고 가중치 $1-\hat{\epsilon}^o$은 평균치 $\hat{q}^o$

에 대한 이 평균치를 구성하는 $\hat{x}_2$의 기여도의 비율이다.

증명 : 정리 5를 참조.

**정리 7** 기여율 정리 3 : $\hat{Q} \fallingdotseq \hat{X}_1$일 때 본원공간에서 기여율 $\hat{e}^o$은 쌍대공간에서 기여율 $\hat{\varepsilon}^o$과 일치하지 않는다.

증명 : 식 (26)에서 $\hat{e}^o = \hat{\varepsilon}^o\left(\dfrac{\hat{Q}}{\hat{X}_1}\right)$이고 식 (24)에서 $\hat{\varepsilon}^o = \hat{e}^o\left(\dfrac{\hat{q}}{\hat{x}_1}\right)$이다. 따라서, $\hat{Q} \fallingdotseq \hat{X}_1$이면 $\hat{e}^o \fallingdotseq \hat{\varepsilon}^o$이다. 증명 끝.

**5.** 풀이식 (21)에 의하면 $\hat{\varepsilon}^o \fallingdotseq \hat{e}^o$ 일 때 점 $\hat{F}$의 좌표는 $(\hat{X}_1^o, \hat{X}_2^o)$이며 $\hat{X}_1^o \fallingdotseq \hat{X}_2^o$인데, 이 점에서 접선의 기울기를 $\hat{p}^o$로 정의하면 점 $\hat{F} = (\hat{X}_1^o, \hat{X}_2^o)$에서 다음이 성립한다.

$$\frac{\hat{\varepsilon}^o}{1-\hat{\varepsilon}^o}\left(\frac{\hat{X}_2^o}{\hat{X}_1^o}\right)^2\Bigg|_{\hat{F}} = \hat{p}^o \tag{28}$$

$$\frac{1}{\hat{Q}^o} = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_1^o} + \frac{1-\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_2^o} \tag{29}$$

$$\hat{Q}^o = \hat{e}^o\hat{X}_1^o + (1-\hat{e}^o)\hat{X}_2^o \tag{30}$$

식 (28)에 의하면 점 $\hat{F}$에서 식 (29)로 정의된 조화평균 $\dfrac{1}{\hat{Q}^o} = \dfrac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_1^o} + \dfrac{1-\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_2^o}$의 기울기와 이 점에 접하는 접선의 기울기 $\hat{p}^o$가 일치한다. 그러면 점 $\hat{F}$와 점 $\hat{E}$를 연결한 직선이 식 (30)으로 정의된 산술평균 $\hat{Q}^o = \hat{e}^o\hat{X}_1^o + (1-\hat{e}^o)\hat{X}_2^o$이다.

이제 점 $\hat{F}$가 위치한 '동일 조화평균' $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o]$ : $\dfrac{1}{\hat{Q}^o} = \dfrac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_1} + \dfrac{1-\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_2}$상에 점 $\hat{F}$와 다르며 점 $\hat{E}$와도 다른 점 $\hat{H} = (\hat{X}_1^H, \hat{X}_2^H)$를 선택하자. 정의에 의해서 $\hat{H} \fallingdotseq \hat{E}$이므로 $\hat{X}_1^H \fallingdotseq \hat{X}_2^H$이다. 또한 정의에 의해서 $\hat{H} \fallingdotseq \hat{F}$이므로 $\hat{X}_1^H \fallingdotseq \hat{X}_1$이며 $\hat{X}_2^H \fallingdotseq \hat{X}_2$이어야 하는데 두 점 $\hat{H}$와 $\hat{F}$는 모두 '동일 조화평균'에 위치하므로 조화평균의 가중치 $\hat{\varepsilon}^o$는 동일해야 한다. 따라서 $\hat{H} \fallingdotseq \hat{F}$이 되려면 식 (21)로부터 $\hat{e}^o \fallingdotseq \hat{e}^H$이어야 한다. 그러면 정리 2에 의하여 점 $\hat{H}$와 점 $\hat{E}$를 연결하여 $\hat{Q}^o[\hat{e}^H]$로 표기되는 또 하나의 산술평균

$$\hat{Q}^o = \hat{e}^H\hat{X}_1 + (1-\hat{e}^H)\hat{X}_2 \tag{31}$$

가 좌표 $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$상에 존재한다. 두 점 $\hat{H}$와 $\hat{E}$는 조화평균 $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o] : \frac{1}{\hat{Q}^o} = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_1} + \frac{1-\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_2}$과 산술평균 $\hat{Q}^o[\hat{e}^H] : \hat{Q}^o = \hat{e}^H\hat{X}_1 + (1-\hat{e}^H)\hat{X}_2$에 의해서 결정되는데 그 좌표는 과 같다.

$$\hat{E} = (\hat{Q}^o, \hat{Q}^o), \qquad \hat{H} = \left(\frac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{e}^H}\hat{Q}^o, \frac{1-\hat{\varepsilon}^o}{1-\hat{e}^H}\hat{Q}^o\right) \tag{32}$$

점 $\hat{E}$는 자명한 풀이이므로 배제한다. 점 $\hat{H}$에서 접선의 기울기를 $\hat{p}^H$로 표기하면 점 $\hat{H} = (\hat{X}_1^H, \hat{X}_2^H)$에서 다음이 성립한다.

$$\frac{\hat{\varepsilon}^o}{1-\hat{\varepsilon}^o}\left(\frac{\hat{X}_2^H}{\hat{X}_1^H}\right)\Bigg|_{\hat{H}} = \hat{p}^H \tag{33}$$

$$\frac{1}{\hat{Q}^o} = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_1^H} + \frac{1-\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_2^H} \tag{34}$$

$$\hat{Q}^o = \hat{e}^H\hat{X}_1^H + (1-\hat{e}^H)\hat{X}_2^H \tag{35}$$

식 (33)에 의하면 점 $\hat{H}$에서 식 (34)로 정의된 조화평균 $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^H] : \frac{1}{\hat{Q}^o} = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_1^H} + \frac{1-\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_2^H}$의 기울기와 이 점에 접하는 접선의 기울기 $\hat{p}^H$가 일치한다. 그러면 점 $\hat{H}$와 점 $\hat{E}$를 연결한 직선이 식 (35)로 표현한 산술평균 $\hat{Q}^o[\hat{e}^H] : \hat{Q}^o = \hat{e}^H\hat{X}_1^H + (1-\hat{e}^H)\hat{X}_2^H$이다. 여기서 다음을 정의한다.

**정의 2** 선상이동

일정한 가중치와 평균치로 정의되는 하나의 조화평균이 나타내는 직각쌍곡선상의 한 점에서 '동일 직각쌍곡선' 상의 다른 점으로 이동하는 현상은 線上移動(a movement along a line)이다.

정의 2에 의하면 하나의 조화평균 $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o] : \frac{1}{\hat{Q}^o} = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_1} + \frac{1-\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_2}$이 나타내는 직각쌍곡선상의 점 $\hat{F} = (\hat{X}_1^o, \hat{X}_2^o)$에서 출발하여 평균치 $\hat{Q}^o$와 가중치 $\hat{\varepsilon}^o$가 같은 '동일 조화평균' $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o] : \frac{1}{\hat{Q}^o} = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_1} + \frac{1-\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_2}$이 나타내는 동일 직각쌍곡선상의 점 $\hat{H} = (\hat{X}_1^H, \hat{X}_2^H)$로 이동하는 현상은 본원공간의 선상이동이다. 조화평균의 대표적인 예가 CES

생산함수의 등량곡선이므로 선상이동의 대표적인 예는 하나의 등량곡선상의 힉스 대체효과이다.

**6.** 본원공간의 선상이동을 쌍대공간의 선상이동으로 재현해 보자. 본원공간에서 선상이동은 한 개의 '동일 조화평균' $\hat{Q}^o[\hat{\epsilon}^o]$에서 두 개의 서로 다른 산술평균 $\hat{Q}^o[\hat{e}^o]$와 $\hat{Q}^o[\hat{e}^H]$ 사이에 일어나는 이동인데, 이 결과가 쌍대공간에서 대수적으로 정확하게 일치하려면 변수전환 때문에 한 개의 '동일 산술평균' $\hat{q}^o[\hat{\epsilon}^o]$에서 두 개의 서로 다른 조화평균 $\hat{q}^o[\hat{e}^o]$와 $\hat{q}^o[\hat{e}^H]$ 사이에 이동이 일어나야 한다. 이 때 본원공간에서 동일 조화평균 $\hat{Q}^o[\hat{\epsilon}^o]$상의 선상이동은 쌍대공간에서는 한 개의 동일 산술평균 $\hat{q}^o[\hat{\epsilon}^o]$상의 이동으로 나타날 수밖에 없는데 이것은 선상이동의 정의에 의하면 조화평균이 나타내는 직각쌍곡선상의 선상이동이 아니고 산술평균이 나타내는 직선상의 이동이다. 이 현상을 검토해 보자.

본원공간의 조화평균 $\hat{Q}^o[\hat{\epsilon}^o] : \dfrac{1}{\hat{Q}^o} = \dfrac{\hat{\epsilon}^o}{\hat{X}_1} + \dfrac{1-\hat{\epsilon}^o}{\hat{X}_2}$를 변수전환하면 정의 1에 의해 쌍대공간의 산술평균 $\hat{q}^o[\hat{\epsilon}^o] : \hat{q}^o = \hat{\epsilon}^o\hat{x}_1 + (1-\hat{\epsilon}^o)\hat{x}_2$가 된다. 마찬가지로 본원공간의 산술평균 $\hat{Q}^o[\hat{e}^o] : \hat{Q}^o = \hat{e}^o\hat{X}_1 + (1-\hat{e}^o)\hat{X}_2$를 변수전환하면 정의 1에 의해 쌍대공간의 조화평균 $\hat{q}^o[\hat{e}^o] : \dfrac{1}{\hat{q}^o} = \dfrac{\hat{e}^o}{\hat{x}_1} + \dfrac{1-\hat{e}^o}{\hat{x}_2}$이 된다. 본원공간에서 조화평균 $\hat{Q}^o[\hat{\epsilon}^o]$과 산술평균 $\hat{Q}^o[\hat{e}^o]$이 두 점 $\hat{E}$과 $\hat{F}$에서 만나듯이 쌍대공간에서 산술평균 $\hat{q}^o[\hat{\epsilon}^o]$과 조화평균 $\hat{q}^o[\hat{e}^o]$은 두 점 $\hat{E}^{-1}$와 $\hat{F}^{-1}$에서 만난다. 점 $\hat{E}^{-1}$는 자명한 풀이이므로 배제하고, 점 $\hat{F}^{-1}$를 생각한다. 점 $\hat{F}^{-1}$의 좌표는 $(\hat{x}_1^o, \hat{x}_2^o)$이며 $\hat{x}_1^o \fallingdotseq \hat{x}_2^o$인데 풀이식 (22)에 의해 본원공간의 점 $\hat{F}$는 쌍대공간의 점 $\hat{F}^{-1}$에 해당한다. $\hat{F}\hat{F}^{-1} = I$이므로 정리 2 에 의하여 풀이가 양 공간에서 일치한다. 점 $\hat{F}^{-1}$에서 접선의 기울기를 $\hat{r}^o$로 정의하면 점 $\hat{F}^{-1} = (\hat{x}_1^o, \hat{x}_2^o)$에서 다음이 성립한다.

$$\frac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o}\left(\frac{\hat{x}_2^o}{\hat{x}_1^o}\right)^2\Bigg|_{\hat{F}^{-1}} = \hat{r}^o \tag{36}$$

$$\frac{1}{\hat{q}^o} = \frac{\hat{e}^o}{\hat{x}_1^o} + \frac{1-\hat{e}^o}{\hat{x}_2^o} \tag{37}$$

$$\hat{q}^o = \hat{\epsilon}^o\hat{x}_1^o + (1-\hat{\epsilon}^o)\hat{x}_2^o \tag{38}$$

식 (36)에 의하면 점 $\hat{F}^{-1}$에서 식 (37)로 정의된 조화평균 $\dfrac{1}{\hat{q}^o} = \dfrac{\hat{e}^o}{\hat{x}_1^o} + \dfrac{1-\hat{e}^o}{\hat{x}_2^o}$의

기울기와 이 점에 접하는 접선의 기울기 $\hat{r}^o$가 일치한다. 그러면 점 $\hat{F}^{-1}$와 점 $\hat{E}^{-1}$를 연결한 직선이 식 (38)로 정의된 산술평균 $\hat{q}^o = \hat{\varepsilon}^o\hat{x}_1^o + (1-\hat{\varepsilon}^o)\hat{x}_2^o$이다.

한편, 본원공간에서 두 점 $\hat{E}$와 $\hat{H}$를 만들어 내는 조화평균 $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o]$과 산술평균 $\hat{Q}^o[\hat{e}^H]$을 쌍대공간으로 변수전환하면 정의 1에 의해서 각각 쌍대공간의 산술평균 $\hat{q}^o[\hat{\varepsilon}^o] : \hat{q}^o = \hat{\varepsilon}^o\hat{x}_1 + (1-\hat{\varepsilon}^o)\hat{x}_2$와 조화평균 $\hat{q}^o[\hat{e}^H] : \frac{1}{\hat{q}^o} = \frac{\hat{e}^H}{\hat{x}_1} + \frac{1-\hat{e}^H}{\hat{x}_2}$이 된다. 이 두 선은 두 점 $\hat{E}^{-1}$와 $\hat{H}^{-1}$에서 만나는데 그 좌표는 다음과 같다.

$$\hat{E}^{-1} = (\hat{q}^o, \hat{q}^o), \qquad \hat{H}^{-1} = \left(\frac{\hat{e}^H}{\hat{\varepsilon}^o}\hat{q}^o, \frac{1-\hat{e}^H}{1-\hat{\varepsilon}^o}\hat{q}^o\right) \tag{39}$$

점 $\hat{E}^{-1}$는 자명한 풀이이므로 배제하고, 점 $\hat{H}^{-1}$를 생각한다. 점 $\hat{H}^{-1}$의 좌표는 $(\hat{x}_1^H, \hat{x}_2^H)$이며 $\hat{e}^H \fallingdotseq \hat{\varepsilon}^o$일 때 $\hat{x}_1^H \fallingdotseq \hat{x}_2^H$인데 이 점에서 접선의 기울기를 $\hat{r}^H$로 정의하면 점 $\hat{H}^{-1} = (\hat{x}_1^H, \hat{x}_2^H)$에서 다음이 성립한다.

$$\frac{\hat{e}^H}{1-\hat{e}^H}\left(\frac{\hat{x}_2^H}{\hat{x}_1^H}\right)^2\Bigg|_{\hat{H}^{-1}} = \hat{r}^H \tag{40}$$

$$\frac{1}{\hat{q}^o} = \frac{\hat{e}^H}{\hat{x}_1^H} + \frac{1-\hat{e}^H}{\hat{x}_2^H} \tag{41}$$

$$\hat{q}^o = \hat{\varepsilon}^o\hat{x}_1^H + (1-\hat{\varepsilon}^o)\hat{x}_2^H \tag{42}$$

식 (40)에 의하면 점 $\hat{H}^{-1}$에서 식 (41)로 정의된 조화평균 $\frac{1}{\hat{q}^o} = \frac{\hat{e}^H}{\hat{x}_1^H} + \frac{1-\hat{e}^H}{\hat{x}_2^H}$의 기울기와 이 점에 접하는 접선의 기울기 $\hat{r}^H$가 일치한다. 그러면 점 $\hat{H}^{-1}$와 점 $\hat{E}^{-1}$를 연결한 직선이 식 (42)로 정의된 산술평균 $\hat{q}^o = \hat{\varepsilon}^o\hat{x}_1^H + (1-\hat{\varepsilon}^o)\hat{x}_2^H$이다.

풀이 식 (32)와 식 (39)에 의해서 $\hat{H}\hat{H}^{-1} = I$이므로 풀이가 양 공간에서 일치한다. 이 때 본원공간에서 두 개의 본원점 $\hat{F}$와 $\hat{H}$는 모두 '동일 조화평균' $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o] : \frac{1}{\hat{Q}^o} = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_1} + \frac{1-\hat{\varepsilon}^o}{\hat{X}_2}$상에 존재한다. 조화평균 식 (29)의 가중치와 조화평균 식 (32)의 가중치가 동일하기 때문이다. 다만 두 점은 서로 '다른 산술평균' $\hat{Q}^o[\hat{e}^o]$와 $\hat{Q}^o[\hat{e}^H]$에 존재하는데 산술평균 식 (30)의 가중치가 산술평균 식 (35)의 가중치와 다른 점이 그 증거이다.

이와 대조적으로 쌍대공간에서 점 $\hat{F}^{-1}$는 조화평균 $\hat{q}^o[\hat{e}^o] : \frac{1}{\hat{q}^o} = \frac{\hat{e}^o}{\hat{x}_1} + \frac{1-\hat{e}^o}{\hat{x}_2}$에

위치하고 점 $\hat{H}^{-1}$는 조화평균 $\hat{q}^o[\hat{e}^H] : \frac{1}{\hat{q}^o} = \frac{\hat{e}^H}{\hat{x}_1} + \frac{1-\hat{e}^H}{\hat{x}_2}$에 위치하므로 점 $\hat{F}^{-1}$와 점 $\hat{H}^{-1}$는 '동일 조화평균'에 존재하지 않는다. 가중치가 서로 '다른 조화평균' 식 (37)과 식 (41)의 비교가 그것이다. 다만 산술평균 식 (38)과 식 (42)는 가중치가 동일하므로 두 개의 쌍대점 $\hat{F}^{-1}$와 $\hat{H}^{-1}$는 '동일 산술평균' $\hat{q}^o[\hat{\epsilon}^o]$에 존재할 따름이다. 본원공간의 선상이동의 정의는 정의 2에 의하여 쌍대공간에서는 불가능하다. 다음의 정리 8이 성립한다.

**정리 8** 선상이동의 불가능성 : 본원공간과 쌍대공간에서 '동시에' 각각의 '동일 조화평균' 상에서 선상이동의 정의는 불가능하다.

증명 : 본원공간에서 '동일 조화평균' $\hat{Q}^o[\hat{\epsilon}^o]$상의 임의의 두 점 $\hat{R} = [\hat{X}_1, \hat{X}_2]$와 $\hat{\hat{R}} = [\hat{\hat{X}}_1, \hat{\hat{X}}_2]$ 사이의 이동을 생각하자. 본원공간의 이 이동과 정확하게 일치하는 두 개의 쌍대점 $\hat{R}^{-1} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$와 $\hat{\hat{R}}^{-1} = [\hat{\hat{x}}_1, \hat{\hat{x}}_2]$ 사이의 이동을 쌍대공간의 '동일 조화평균' $\hat{q}^o[\hat{e}^o]$ 상에서 생각하자. 우리의 목적은 $\hat{R} = \hat{\hat{R}}$과 $\hat{R}^{-1} = \hat{\hat{R}}^{-1}$임을 증명하는 것이다. 다음을 정의한다.

$$\frac{\hat{\hat{X}}_2}{\hat{\hat{X}}_1} = \hat{\hat{\lambda}} \frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1}, \qquad \hat{\hat{\lambda}} = \frac{\hat{\hat{e}}^o}{1-\hat{\hat{e}}^o} \frac{1-\hat{e}^o}{\hat{e}^o} \frac{1-\hat{\hat{\epsilon}}^o}{\hat{\hat{\epsilon}}^o} \frac{\hat{\epsilon}^o}{1-\hat{\epsilon}^o} \tag{43}$$

먼저 본원공간의 이동부터 조사한다. 본원공간의 '동일 조화평균' $\hat{Q}^o[\hat{\epsilon}^o]$상의 모든 점에서 조화평균의 가중치 $\hat{\epsilon}^o$는 $\hat{\epsilon}^o = \hat{\hat{\epsilon}}^o$으로서 일정하므로 두 점 $\hat{R}$과 $\hat{\hat{R}}$에서 다음이 성립한다.

$$\hat{p}^o = \frac{\hat{\epsilon}^o}{1-\hat{\epsilon}^o}\left(\frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1}\right)^2\Bigg|_{\hat{R}}, \qquad \hat{\hat{p}}^o = \frac{\hat{\epsilon}^o}{1-\hat{\epsilon}^o}\left(\frac{\hat{\hat{X}}_2}{\hat{\hat{X}}_1}\right)^2\Bigg|_{\hat{\hat{R}}} \tag{44}$$

그러나 두 점 $\hat{R} = [\hat{X}_1, \hat{X}_2]$와 $\hat{\hat{R}} = [\hat{\hat{X}}_1, \hat{\hat{X}}_2]$에서 산술평균의 가중치는 $\hat{e}^o \fallingdotseq \hat{\hat{e}}^o$이다. 따라서, 이와 정확하게 일치하는 식이 쌍대공간에서는

$$\hat{r}^o = \frac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o}\left(\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}\right)^2, \qquad \hat{\hat{r}}^o = \frac{\hat{\hat{e}}^o}{1-\hat{\hat{e}}^o}\left(\frac{\hat{\hat{x}}_2}{\hat{\hat{x}}_1}\right)^2 \tag{45}$$

인데 이것은 '동일 조화평균' $\hat{q}^o[\hat{e}^o]$ 상의 두 점이 아니다. 쌍대공간의 '동일 조화평균' $\hat{q}^o[\hat{e}^o]$ 상의 두 점 $\hat{R}^{-1}$와 $\hat{\hat{R}}^{-1}$에서는 가중치 $\hat{e}^o$가 $\hat{e}^o = \hat{\hat{e}}^o$으로 일정해야 하므로 식 (45)는 식 (43)의 도움으로 $\hat{e}^o = \hat{\hat{e}}^o$ 일 때

$$\hat{r}^o = \frac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o}\left(\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}\right)^2\Bigg|_{\hat{R}^{-1}}, \qquad \left(\frac{1}{\hat{\hat{\lambda}}}\right)\hat{\hat{r}}^o = \frac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o}\left(\frac{\hat{\hat{x}}_2}{\hat{\hat{x}}_1}\right)^2\Bigg|_{\hat{\hat{R}}^{-1}} \tag{46}$$

이 되어야만 양 공간에서 각각의 '동일 조화평균' 상의 이동이 정확히 일치한다. 그 결과 식 (43) ~ (46)에서

$$\frac{\hat{\hat{p}}^o}{\hat{\hat{r}}^o} = \hat{\hat{\lambda}}^3\frac{\hat{p}^o}{\hat{r}^o}, \qquad \hat{\hat{p}}^o = \hat{\hat{\lambda}}^2\hat{p}^o, \qquad \hat{\hat{r}}^o = \left(\frac{1}{\hat{\hat{\lambda}}}\right)\hat{r}^o \tag{47}$$

이다.

이번에는 쌍대공간을 먼저 조사한다. 쌍대공간의 '동일 조화평균' 상의 모든 점에서 가중치 $\hat{e}$는 $\hat{e}^o = \hat{\hat{e}}^o$으로 일정하므로 다음의 식이 두 점 $\hat{R}^{-1}$와 $\hat{\hat{R}}^{-1}$에서 성립한다.

$$\hat{r}^o = \frac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o}\left(\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}\right)^2\Bigg|_{\hat{R}^{-1}}, \qquad \hat{\hat{r}}^o = \frac{\hat{e}^o}{1-\hat{e}^o}\left(\frac{\hat{\hat{x}}_2}{\hat{\hat{x}}_1}\right)^2\Bigg|_{\hat{\hat{R}}^{-1}} \tag{48}$$

그러나 두 점 $\hat{R}^{-1} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2]$와 $\hat{\hat{R}}^{-1} = [\hat{\hat{x}}_1, \hat{\hat{x}}_2]$에서 산술평균의 가중치는 $\hat{\varepsilon}^o \neq \hat{\hat{\varepsilon}}^o$이다. 따라서 이와 정확하게 일치하는 식은 본원공간에서

$$\hat{p}^o = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{1-\hat{\varepsilon}^o}\left(\frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1}\right)^2, \qquad \hat{\hat{p}}^o = \frac{\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o}\left(\frac{\hat{\hat{X}}_2}{\hat{\hat{X}}_1}\right)^2 \tag{49}$$

인데 이것은 본원공간의 '동일 조화평균' $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o]$ 상의 두 점이 아니다. 본원공간의 '동일 조화평균' $\hat{Q}^o[\hat{\varepsilon}^o]$ 상의 두 점 $\hat{R}$과 $\hat{\hat{R}}$에서는 가중치 $\hat{\varepsilon}$가 $\hat{\varepsilon}^o = \hat{\hat{\varepsilon}}^o$으로서 일정해야 하므로 식 (49)는 식 (43)의 도움으로 $\hat{\varepsilon}^o = \hat{\hat{\varepsilon}}^o$ 일 때

$$\hat{p}^o = \frac{\hat{\varepsilon}^o}{1-\hat{\varepsilon}^o}\left(\frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1}\right)^2\Bigg|_{\hat{R}}, \qquad \hat{\hat{\lambda}}\hat{\hat{p}}^o = \frac{\hat{\hat{\varepsilon}}^o}{1-\hat{\hat{\varepsilon}}^o}\left(\frac{\hat{\hat{X}}_2}{\hat{\hat{X}}_1}\right)^2\Bigg|_{\hat{\hat{R}}} \tag{50}$$

이 되어야만 양 공간에서 각각의 '동일' 무차별곡선상의 이동은 정확하게 일치한다. 그 결과 식 (48)~(50)에서

$$\frac{\hat{\hat{p}}^o}{\hat{\hat{r}}^o} = \hat{\hat{\lambda}}^3 \frac{\hat{p}^o}{\hat{r}^o}, \qquad \hat{\hat{p}}^o = \hat{\hat{\lambda}}\hat{p}^o, \qquad \hat{\hat{r}}^o = \left(\frac{1}{\hat{\hat{\lambda}}}\right)\hat{r}^o \tag{51}$$

이다. 그러므로 식 (47)과 식 (51)에서

$$\hat{\hat{\lambda}} = 1, \qquad \hat{\hat{p}}^o = \hat{p}^o, \qquad \hat{\hat{r}}^o = \hat{r}^o \tag{52}$$

이다. 따라서 식 (43)~(44)와 식 (46)에서 $\hat{R} = \hat{\hat{R}}$이고 $\hat{R}^{-1} = \hat{\hat{R}}^{-1}$이다. 증명 끝.

정리 7에 의하면 양 공간에서 선상이동이 정확하게 일치하도록 각각 '동일 조화평균' 상의 이동을 정의하려면 반드시 본원공간에서 $\hat{F} = \hat{H}$이고 쌍대공간에서 $\hat{F}^{-1} = \hat{H}^{-1}$이 되므로 선상이동을 정의할 수 없다. 표현을 바꾸면 $\hat{F} \fallingdotseq \hat{H}$이고 $\hat{F}^{-1} \fallingdotseq \hat{H}^{-1}$이면 반드시 두 공간 가운데 하나의 공간에서는 선상이동이 양 공간에서 정확하게 일치하도록 두 점을 '동일 조화평균' 상에서 정의할 수 없다는 뜻이다.

**7.** 본원공간에서 선상이동은 동일 조화평균상의 이동이므로 이동한 두 점에서 각각 기울기가 다르므로 대체효과의 정의가 가능하다. 이와 대조적으로 쌍대공간에서는 동일 산술평균상에서의 이동이므로 이동한 두 점 사이에 기울기가 동일하다. 따라서, 힉스 대체효과의 정의가 불가능하다. 힉스 대체효과의 정의가 불가능하면 대체탄력성의 정의도 불가능하게 된다.

선상이동의 불가능성은 그 자체로도 중요하지만 선간이동(線間移動, a movement among lines)의 정의를 불가능하게 만든다는 데 그 중요성이 있다. 선간이동의 예는 힉스 수량효과(또는 소득효과)이다. 이에 대한 논의와 증명은 다른 연구에서 다루기로 한다.

## ❖ 참 고 문 헌 ❖

김학은, "사회적 선택의 2차 불가능성에 관한 실험적 소고", 「연세경제연구」, Ⅶ(1), 2000, pp. 87～100.