연세경제연구 제 Ⅶ권, 제 1 호
Yonsei Economic Studies, Vol. Ⅶ, No. 1 (March 2000)

사회적 선택의 2차 불가능성에 관한 실험적 소고

김 학 은

본 논문은 애로우의 불가능성 정리에 적절한 제약조건을 허락하여 사회무차별함수가 존재한다 하여도 또 하나의 불가능성이 존재할 수 있는 가능성에 대한 실험적 소고이다. 유량변수는 단위 시간에 측정하는 크기이다. 대부분의 경제분석은 여기에 근거를 두고 있다. 반대로 유량변수의 역수는 단위 유량변수의 흐름을 측정하는 시간이다. 따라서, 모든 경제분석의 결과는 변수전환에 근거를 둔 분석의 결과와 일치해야 한다. 이 점에 있어서 단순한 비교정태분석은 심각한 문제를 일으킨다. 이것이 2차 불가능성의 근원이 될 수 있다.

Ⅰ. 머 리 말

Arrow [2]의 불가능성 정리에 의해 사회적 선택에는 본질적으로 어려운 문제가 내재되고 있음이 밝혀졌다. 적절한 제약조건하에서 그의 불가능성은 가능성이 될 수 있다는 사실도 알려져 있다. 어떠한 형태로든지 사회후생함수 존재의 중요성은 파레토 최적 소득분배가 결정된다는 데 있다. 이 논문은 설사 애로우의 가능성 정리가 성립하여 사회후생함수가 존재한다 하여도 또 하나의 불가능성이 존재할 수 있음을 실험적으로 보여 준다.

경제학의 모든 유량변수는 단위 시간에 측정하는 크기이다. 효용(utility)도 예외가 아니다(Henderson and Quandt [3]). 효용을 발생하는 재화가 단위 시간에 소비하는 유량변수이기 때문이다. 대부분의 경제분석은 여기에 기초하고 있다. 그러나 유량변수의 역수(逆數)는 해당 유량변수 한 단위가 흐르는 시간이 된다. 이 같은 관계는 수학적으로는 변수전환 또는 좌표전환(transformation)에 해당한다. 대표적인 예가 화폐

연세대학교 경제학과 교수, 서울시 서대문구 신촌동 134, 120-749.

의 유통속도이다. 피셔의 교환방정식 $MV = Y$에서 V는 단위 시간에 화폐가 유통되는 회전수를 가리키지만 캠브리지 방정식 $M = kY$에서 k는 V의 역수로 화폐보유시간 또는 화폐가 단위 회전하는 데 걸리는 시간을 의미한다.

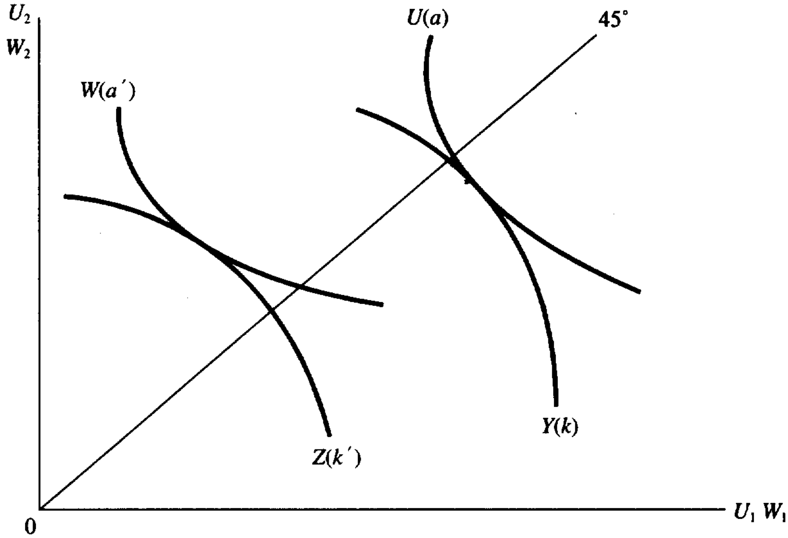
단위 시간과 유량변수 사이의 관계를 편의상 본원문제(primary problem)라 일컫는다면 단위 유량변수와 시간 사이의 관계를 쌍대문제(dual problem)라고 부를 수 있다. 본원문제의 결과와 쌍대문제의 결과는 논리적으로 정확하게 일치해야 한다. 다시 예를 들면 피셔의 교환방정식 $MV = Y$의 결과나 캠브리지 방정식 $M = kY$의 결과는 동일하다. 그러나 이 두 문제 사이에는 복잡한 관계가 내재하고 있다. 본원문제에서 총효과를 예로 들어본다.

총효과는 대체효과와 수량효과로 나누어진다. 힉스의 대체효과는 하나의 동일 무차별곡선 상에 서로 다른 두 개의 기울기를 갖는 두 개의 직선 사이에서 일어나는 현상이다. 이 현상을 쌍대문제에서 보아 변수전환을 하면 두 개의 직선은 두 개의 무차별곡선이 되며 반대로 하나의 무차별곡선은 하나의 곡선(또는 직선)으로 전환된다. 이 경우 힉스의 대체효과는 하나의 무차별곡선 상의 한 점에서 다른 무차별곡선의 한 점으로 이동하는 현상이 되어 동일 무차별곡선 상의 이동이 불가능하게 된다. 가령 본원공간에서 무차별곡선의 한 형태는 조화평균일 수 있다. 이것이 쌍대공간에서는 산술평균이 되고, 이 무차별곡선에 접하는 두 개의 제약직선은 쌍대공간에서 두 개의 조화평균으로서 두 개의 무차별곡선이 된다. 이 같은 특성이 일어나는 근본 원인은 본원공간에서 산술평균은 쌍대공간에서 조화평균이 되고, 거꾸로 본원공간에서 조화평균은 쌍대공간에서 산술평균이 된다는 수학적 사실 때문이다. 이 같은 특성은 김학은 [1]이 화폐의 유통속도 분할에 사용한 바 있다. 그 방법을 사회적 선택에 원용해보면 또 하나의 불가능성을 일으킴을 보일 수 있다. 애로우의 불가능성을 1차 불가능성이라고 한다면 변수전환이 일으키는 불가능성을 2차 불가능성이라고 부를 수 있다.

Ⅱ. 사회후생함수

애로우의 사회후생함수는 사회 구성원들의 선호순서에 관한 정보만 갖고는 성립하기 어렵지만 어떠한 규범적인 가치 판단을 도입할 때 존재할 수 있다고 가정한다. 이에 따라 사회후생함수는 전통적으로 크게 벤담(Bentham)의 공리주의 후생함수, 롤즈(Rawls) 후생함수, 평등주의 후생함수 등 세 가지로 분류할 수 있다(Kreps [4]). 공리주의 후생함수는 효용공간에서 기울기가 직선인 함수이며, 롤즈 후생함수는 직각의

〈그림 1〉 본원공간의 비교정학



함수이며, 평등주의 후생함수는 원점에 대해 볼록한 함수이다. 이들을 일반화할 수 있는 사회후생함수로써 다음과 같은 CES함수를 사용할 수 있다.

$$\frac{1}{U^{\rho}} = \frac{a}{U_1^{\rho}} + \frac{1-a}{U_2^{\rho}} \tag{1}$$

여기서 $i = 1, 2$는 개인을 가리키고 U_i는 개인 i의 효용을 나타낸다. 논의를 단순화하기 위해서 2인의 경우를 생각한다. a는 규범적 가치판단하에 개인 1에게 부여할 수 있는 가중치이다. $\rho = -1$이면 공리주의 후생함수가 되고, $\rho \rightarrow \infty$이면 롤즈 후생함수가 되며, 그 밖에 $-1 < \rho \ll \infty$인 경우 평등주의 후생함수에 가깝게 된다. 일반적인 경우는 복잡하므로 실험대상으로 평등주의의 한 예인 $\rho = 1$인 특수 경우를 먼저 다루겠다. 그리고 일반적인 경우는 제Ⅸ장에서 다루기로 한다. 특수한 경우 식 (1)은 다음의 식 (2)가 된다.

$$\frac{1}{U} = \frac{a}{U_1} + \frac{1-a}{U_2} \tag{2}$$

식 (2)는 U_1과 U_2의 공간에서 중심의 좌표가 $[aU, (1-a)U]$인 직각쌍곡선으로서 원점에 대해 볼록한 무차별곡선이다. 이 무차별곡선은 U를 U_1과 U_2의 조화평균으로 나타낸다. 조화평균의 가중치가 바로 규범적 가치판단으로 부여하는 a이다. $U_1 = U_2$일 때 $U_1 = U_2 = U$이다. 〈그림 1〉에서 곡선 $U(a)$가 사회무차별곡선 (2)이다. 이 곡선

상의 한 점 F를 택하자(〈그림 1〉에는 표기하지 않았음). 이 점에서 다음의 식 (3)이 성립한다.

$$\frac{a}{1-a}\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2\Bigg|_F = p \tag{3}$$

여기서 p는 사회무차별곡선 $U(a)$의 한 점 F에 접하는 직선의 기울기를 가리킨다. 이 점을 $F(p)$로 표기하자.

Ⅲ. 대효용가능함수

효용함수가 강오목일 경우 후생경제학의 제2원리에 의하면 모든 파레토 최적 배분에는 다음의 방정식을 만족시키는 양수의 $[k]_{i=1}^{I}$ 가 존재한다(Varian [6], Mossin [5]).

$$V = \sum_i k_i U_i \tag{4}$$

여기서 k_i 는 가중치인데 그 크기는 후생경제학 제2원리에 의해 알려져 있다. 즉, k_i 는 개인 i 의 소득의 한계효용 또는 그림자가격 ψ_i 의 역수이다. 2인의 경우에 식 (4)는 다음의 식 (5)가 된다.

$$V = k_1U_1 + k_2U_2 \tag{5}$$

이 때 가중치 k_i가 개인 i 의 소득의 한계효용의 역수이므로 두 사람 사이에 소득분배의 상태에 따라 변한다. 이 점을 감안하면 개인의 효용함수가 보통의 성격을 만족시킬 때 식 (5)는 U_1과 U_2의 공간에서 원점에 대하여 오목한 볼록함수인 대효용가능곡선(grand utility possibility curve)이 된다. 〈그림 1〉에서 곡선 $V(k)$가 대효용가능곡선 (5)이다. 이 때 V는 알려져 있다. 이 크기는 경제의 자원의 크기에 달려 있다. 즉, 자원의 크기가 변하면 V는 변한다.

Ⅳ. 최적화 문제

보통 최적화 문제는 사회무차별함수 (2)를 대효용가능함수 (5)하에서 극대화하는 것이다. 이 때 사회무차별곡선은 수요함수이고 대효용가능곡선은 공급함수이다. 풀이는 다음의 라그랑주 함수를 최대화한 결과이다.

$$L = \frac{a}{U_1} + \frac{1-a}{U_2} + \lambda[V - k_1U_1 - k_2U_2] \tag{6}$$

여기서 λ는 라그랑주 승수이다. 극대화가 성립하려면 V가 주어져야 한다. 즉, 주어진 V와 k_i 하에서 U를 극대화하는 U_1과 U_2를 선택하는 문제이다. 풀이는 다음의 식 (7)과 같다.

$$\frac{a}{1-a}\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 = \frac{k_1}{k_2} \tag{7}$$

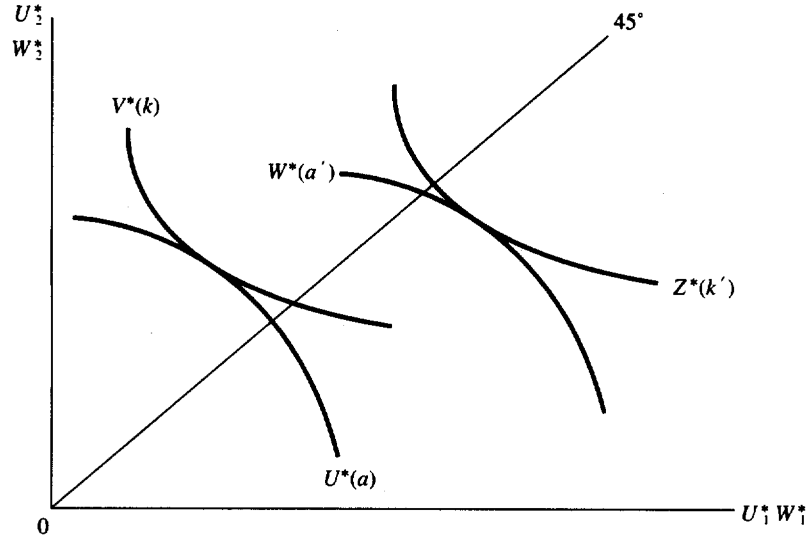
식 (7)에 의하면 극대화란 사회무차별곡선 (2)와 대효용가능곡선 (5)가 서로 접하는 것이다. 대효용가능함수는 파레토 최적점의 집합이다(Varian [6], Mossin [5]). 무수한 파레토 최적 가운데 사회적 효용함수를 최대로 하는 파레토 최적조건이 식 (7)이다. 〈그림 1〉에서 점 $F(p)$가 사회적 선택점이며 파레토 최적점이다.

가중치 k_i는 후생경제학 제2원리에 의해 결정된다. 따라서, 가중치 a가 규범적인 가치판단에 의해 개인 1에게 부여되면 식 (7)에 의해 개인 사이의 효용의 비율 $\frac{U_2}{U_1}$가 결정될 뿐만 아니라 거꾸로 개인 사이의 소득분배가 결정된다. a가 증가할수록 U_1이 상대적으로 커지며 개인 1의 소득이 커진다. 이것은 상대적으로 효용수준이 낮은 사람에게 높은 비중을 부여하고 효용수준이 높은 사람에게는 낮은 가중치를 부여하는 것이 바람직하다는 평등주의적 견해에 일치한다.

Ⅴ. 변수전환

이상의 결과는 잘 알려져 있다. 이제 변수전환을 이용하여 이 결과를 재확인하도록 한다. 다음을 정의한다. $V^*V \equiv 1$, $U_1^*U_1 \equiv 1$, $U_2^*U_2 \equiv 1$. 별표(*)는 전환된 변수를 가

〈그림 2〉 쌍대공간의 비교정학



리킨다. 앞에서 밝혔듯이 효용 U는 단위 시간에 측정한 크기이다. 따라서, 그의 역수 U^*는 효용 한 단위를 얻는 데 필요한 시간이다. 이 변수전환 정의를 이용하면 식 (5)는 다음과 같이 전환된다.

$$\frac{1}{V^*} = \frac{k_1}{U_1^*} + \frac{k_2}{U_2^*} \tag{8}$$

식 (8)은 중심이 $[2k_1V^*, 2k_2V^*]$인 직각쌍곡선으로 무차별곡선이 된다. 식 (5)는 산술평균인데 이것을 변수전환하면 식 (8)처럼 조화평균이 된다. 달리 표현하면 식 (5)는 직선인데 이것을 변수전환하면 무차별곡선이 된다. 〈그림 2〉에서 무차별곡선 $V^*(k)$가 식 (8)이다. 이 곡선 상의 한 점 F^*를 택하자. 이 점에서 다음이 성립한다.

$$\frac{k_1}{k_2}\left(\frac{U_2^*}{U_1^*}\right)^2 \bigg|_{F^*} = p^* \tag{9}$$

여기서 p^*는 무차별곡선 $V^*(k)$의 한 점 F^*에 접하는 직선의 기울기를 가리킨다. 이 점을 $F^*(p^*)$로 표기하자.

마찬가지 방식으로 식 (2)를 변수전환하면 다음의 식 (10)이 된다.

$$U^* = aU_1^* + (1-a)\,U_2^* \tag{10}$$

식 (2)는 조화평균인데 변수전환을 하여 산술평균 (10)이 된다. 또는 무차별곡선 (2)를 변수전환하면 직선 (10)이 된다. 〈그림 2〉에서 직선 $U^*(a)$가 식 (10)이다. 식 (8)은 식 (5)와, 식 (10)은 식 (2)와 대수적으로 서로 동일한 것이다. 최적화 문제 식 (6)은 다음과 같이 표현된다.

$$L^* = aU_1^* + (1-a)\,U_2^* + \lambda^*\left(\frac{1}{V^*} - \frac{k_1}{U_1^*} - \frac{k_2}{U_2^*}\right) \tag{11}$$

여기서 V^*는 주어져 있다. 주어진 V의 역수이기 때문이다. 풀이는 다음과 같다.

$$\frac{k_1}{k_2}\left(\frac{U_2^*}{U_1^*}\right)^2 = \frac{a}{1-a} \tag{12}$$

식 (12)를 변수전환하면 식 (7)과 대수적으로 동일하다는 것이 증명된다. 식 (7)을 본원문제(primary problem)라 하고 식 (12)를 쌍대문제(dual problem)라 하면 이 같은 변수전환을 통하여 두 문제가 동일한 문제임을 재확인할 수 있다. 어느 공간을 분석하든지 동일한 결과가 보장되므로 상관없다. 〈그림 2〉에서 점 $F^*(p^*)$가 쌍대 사회적 선택점이며 파레토 최적점인데 본원 사회적 선택점 $F(p)$와 동일하다. 편의상 〈그림 1〉을 본원공간, 〈그림 2〉를 쌍대공간이라 부르자.

Ⅵ. 본원공간의 비교정학

단순하게 본원공간의 한 점 $F(p)$와 그의 그림자로써 쌍대공간의 한 점 $F^*(p^*)$를 비교하면 어떠한 공간을 택하든지 결과는 동일함이 재확인되었다. 그러나 하나의 공간의 한 점에서 동일 공간의 다른 점으로 이동하는 현상을 나타내는 비교분석은 그처럼 단순하지 않다. 전통적으로 비교정학은 총효과를 대체효과와 소득효과 또는 수량효과로 분리한다. 이 방법을 여기에서도 원용한다. 본원문제에서 볼 때에는 점 $F(p)$가, 쌍대문제에서 볼 때에는 점 $F^*(p^*)$가 현재 경제의 위치이다. 우리의 관심은 경제가 어디에서 이 점으로 이동해 왔는가를 각 공간에서 살피는 것이다. 점 $F(p)$로 이동한 경로 역시 대체효과와 수량효과로 나누어 생각할 수 있기 때문이다. 동시에 쌍대공간에서도 동일한 현상이 나타난다.

먼저 본원공간에서 식 (2)에 대한 비교정학을 위해서 또 하나의 사회무차별곡선이 필요하다. 그것을 다음과 같이 정의하자.

$$\frac{1}{W} = \frac{a'}{W_1} + \frac{1-a'}{W_2} \tag{13}$$

무차별곡선 (13)을 $W(a')$로 표기하자. 이렇게 설정하면 하나 또는 여러 개의 파라메타가 변할 때 경제는 무차별곡선 $W(a')$의 한 점 $H(\hat{p})$에서 무차별곡선 $U(a)$의 한 점 $F(p)$로 이동한 것이다. 이 때 가중치 a가 a'로 변할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. 즉, 규범적인 가치판단으로 개인 1에게 부여한 가중치가 변할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. $\hat{p}$는 무차별곡선 $W(a')$의 점 H에서 접선의 기울기를 가리킨다. 점 $H(\hat{p})$에서 다음이 성립한다.

$$\frac{a'}{1-a'}\left(\frac{W_2}{W_1}\right)^2 \Bigg|_H = \hat{p} \tag{14}$$

이에 대해 대효용가능곡선 (5)에 대해서도 비교정학을 위하여 또 하나의 대효용가능곡선이 다음과 같이 성립한다.

$$Z = k_1' W_1 + k_2' W_2 \tag{15}$$

여기서 가중치 k_i가 k_i'로 변할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. 〈그림 1〉에서 곡선 $Z(k')$가 식 (15)이다.

사회무차별곡선 (13)을 대효용가능곡선 (15)의 제약하에서 최대로 하는 파레토 최적조건은 다음과 같다.

$$\frac{a'}{1-a'}\left(\frac{W_2}{W_1}\right)^2 = \frac{k_1'}{k_2'} \tag{16}$$

최대화 풀이에는 Z와 k_i'가 주어져 있다.

Ⅶ. 쌍대공간의 비교정학

본원공간에서 일어난 변화는 쌍대공간에서 그림자처럼 동일하게 일어난다. 쌍대무차별곡선 (8)에는 비교정학에서 볼 때 또 하나의 쌍대 무차별곡선이 대응한다.

$$\frac{1}{Z^*} = \frac{k_1'}{W_1^*} + \frac{k_2'}{W_2^*} \tag{17}$$

여기서 $Z^*Z=1$, $W_1^*W_1=1$, $W_2^*W_2=1$이다. 〈그림 2〉의 무차별곡선 $Z^*(k')$가 식 (17)인데 변수전환을 하면 식 (15)와 동일하다. 이 곡선 상의 한 점 $H^*(\hat{p}^*)$를 택하고 이 점의 접선의 기울기를 $\hat{p}^*$라 표기한다. 이 점에서 다음이 성립한다.

$$\frac{k_1'}{k_2'}\left(\frac{W_2^*}{W_1^*}\right)^2 \Bigg|_{H^*} = \hat{p}^* \tag{18}$$

쌍대 대효용가능곡선 (10)에 대해 비교정학으로 대응하는 또 하나의 쌍대 대효용가능곡선은 다음과 같다.

$$W^* = a'W_1^* + (1-a')W_2^* \tag{19}$$

이 식은 본원공간의 식 (13)을 변수전환한 것이다.

사회무차별곡선 (17)을 대효용가능곡선 (19)의 제약하에서 최대로 하는 파레토 최적조건은 다음과 같다.

$$\frac{k_1'}{k_2'}\left(\frac{W_2^*}{W_1^*}\right)^2 = \frac{a'}{1-a'} \tag{20}$$

변수전환을 하면 식 (20)은 식 (16)과 대수적으로 동일하다.

Ⅷ. 사회적 선택의 2차 불가능성

이제 우리는 본원공간과 쌍대공간 양 공간에서 비교분석에 필요한 독립방정식을 모두 구했다. 경제는 본원공간의 점 $H(\hat{p})$에서 점 $F(p)$로 이동할 때 동시에 쌍대공간의 $H^*(\hat{p}^*)$에서 점 $F^*(p^*)$로 이동한다. 이 때 $p=\hat{p}$이고 $p^*=\hat{p}^*$이면 양 공간에서 수량효과가 성립한다. 이 조건만으로 우리는 수량효과를 만족시키고 있다. 즉, 경제는 본원공간에서 보면 무차별곡선 $W(a')$ 상의 어느 한 점에서 대체효과에 의해 동일 무차별곡선 상의 한 점 $H(\hat{p})$로 이동하고 다시 이 점에서 수량효과에 의해 $\hat{p}=p$의

조건하에서 다른 무차별곡선 $U(a)$의 한 점 $F(p)$로 이동한다. 이것은 쌍대 공간에서 보면 무차별곡선 $W^*(k')$ 상의 어느 한 점에서 대체효과에 의해 동일 무차별곡선 상의 한 점 $H^*(\hat{p}^*)$로 이동하고 다시 이 점에서 수량효과에 의해 $\hat{p}^*=p^*$의 조건하에서 다른 무차별곡선 $U^*(k)$의 한 점 $F^*(p^*)$로 이동한 것과 동일해야 한다. 이 가운데 우리의 분석에 필요로 하는 부분은 수량효과만으로 충분하다. 따라서, 풀이 가운데 하나인 $H(\hat{p})$는 대체효과가 완료된 곳이므로 경제가 $F(p)$로 이동하기 전에 어느 점에 있었는지는 알 수 없다.

마지막으로 파레토 최적조건을 추가하면 사회적 선택에 필요한 모든 방정식이 결정된다. 따라서, 연립방정식체계는 다음과 같다.

$$\frac{1}{U}=\frac{a}{U_1}+\frac{1-a}{U_2} \qquad (2) \qquad\qquad \frac{1}{V^*}=\frac{k_1}{U_1^*}+\frac{k_2}{U_2^*} \qquad (8)$$

$$\frac{a}{1-a}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2\Bigg|_F=p \qquad (3) \qquad\qquad \frac{k_1}{k_2}\left(\frac{U_2^*}{U_1^*}\right)^2\Bigg|_{F^*}=p^* \qquad (9)$$

$$\frac{1}{W}=\frac{a'}{W_1}+\frac{1-a'}{W_2} \qquad (13) \qquad\qquad \frac{1}{Z^*}=\frac{k_1'}{W_1^*}+\frac{k_2'}{W_2^*} \qquad (17)$$

$$\frac{a'}{1-a'}\left(\frac{W_2}{W_1}\right)^2\Bigg|_H=\hat{p} \qquad (14) \qquad\qquad \frac{k_1'}{k_2'}\left(\frac{W_2^*}{W_1^*}\right)^2\Bigg|_{H^*}=\hat{p}^* \qquad (15)$$

이 연립방정식체계는 8개의 방정식으로 구성되어 있다. 여기에 수량효과를 나타내는 두 개의 정의식 (21), (22)를 도입한다.

$$p=\hat{p} \qquad (21)$$

$$p^*=\hat{p}^* \qquad (22)$$

마지막으로 파레토 최적조건을 추가한다.

$$\frac{a}{1-a}\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2=\frac{k_1}{k_2} \qquad (7)$$

$$\frac{k_1'}{k_2'}\left(\frac{W_2^*}{W_1^*}\right)^2=\frac{a'}{1-a'} \qquad (20)$$

연립방정식체계의 독립방정식의 수는 12개이다. 변수전환을 감안하면 미지수 역시 12개이다(U_1, U_2, W_1, W_2, p, $\hat{p}$, p^*, $\hat{p}^*$, a, a', U, W). 여기서 주어진 정보는 후생경제

학 제2원리에 의해 결정되는 (k_i, k_i')와 제약조건인 (V, Z)이다. 독립방정식의 수와 미지수의 수가 일치하므로 풀이가 존재하는데 그 가운데 주관적 가치판단으로 부여하는 가중치 a와 a'가 모두 체계내에서 내생적으로 결정될 수 있다는 점이 이채롭다. 이것은 다음과 같은 중요한 의미를 담고 있다.

보통 사회적 선택의 분석은 암묵적으로 본원문제만 다룬다. 따라서, 본원문제의 그림자인 쌍대문제를 묘사하는 방정식을 제외하고 본원문제를 나타내는 방정식만 갖고는 규범적 가치판단으로 부여하는 가중치 a가 내생적으로 결정될 수 없다. 이 점을 여기에서도 확인할 수 있다. 즉, 쌍대공간은 생각하지 않고 본원공간만을 나타내는 독립방정식만 따로 분리하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{U} = \frac{a}{U_1} + \frac{1-a}{U_2} \tag{2}$$

$$\frac{a}{1-a}\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 \bigg|_F = p \tag{3}$$

$$V = k_1 U_1 + k_2 U_2 \tag{5}$$

$$\frac{1}{W} = \frac{a'}{W_1} + \frac{1-a'}{W_2} \tag{13}$$

$$\frac{a'}{1-a'}\left(\frac{W_2}{W_1}\right)^2 \bigg|_H = \hat{p} \tag{14}$$

$$Z = k_1' W_1 + k_2' W_2 \tag{15}$$

$$p = \hat{p} \tag{21}$$

$$\frac{a}{1-a}\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 = \frac{k_1}{k_2} \tag{7}$$

$$\frac{a'}{1-a'}\left(\frac{W_2}{W_1}\right)^2 = \frac{k_1'}{k_2'} \tag{16}$$

이 본원체계에는 9개의 독립방정식이 있는데 미지수는 10개(U_1, U_2, W_1, W_2, p, $\hat{p}$, a, a', U, W)이다. 이 가운데 현재 경제가 위치하는 곳에서 가중치 a를 주관적 가치판단에 의해 외생적으로 그 크기를 부여해 주면 풀이가 존재한다. 이 풀이 가운데 a'는 점 $F(\hat{p})$에서의 크기일 뿐이지 경제가 실제로 위치하던 곳의 크기가 아니므로 내생적으로 결정되어야 한다.

이상이 보통의 사회적 선택의 내용이다. 그러나 본원공간의 해가 쌍대공간의 해와

일치하므로 양 공간의 관계를 포함하여 모든 독립방정식의 풀이에서는 주관적 가중치 a조차 방정식 체계내에서 내생적으로 풀어진다. 양 공간을 모두 고려한 풀이는 다음과 같다(증명 생략).

$$a = \frac{k_1}{k_1 + k_2} = \frac{\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} \tag{23}$$

$$U_1 = U_2 \text{와 } W_1 = W_2 \tag{24}$$

식 (23)에 의하면 가중치 a는 주관적 가치판단에 의해 결정되는 것이 아니라 체계내에서 결정될 수 있음을 보여 준다. 개인 1에게 부여하는 가중치는 개인 2의 소득의 그림자가격에 비례하고 개인 2에게 부여하는 가중치는 개인 1의 소득의 그림자가격에 비례한다. 개인 1에 대해 가중치 a을 낮게 부여하면 개인 2의 소득의 그림자가격이 낮아지고 이것은 다시 개인 2의 소득이 높아진다는 것을 의미한다. 그러므로 개인 1에게 유리한 소득분배를 위해서는 높은 가중치 a를 부여해야 한다는 평등주의 후생함수에 부합한다.

그러나 a의 크기는 바로 식 (24)에 의해 결정된다. 식 (24)가 뜻하는 바는 점 $F(p)$가 현재 경제의 위치이므로 경제는 U_1과 U_2의 공간에서 항상 45도선에 위치한다는 것이다. 모든 사람의 효용수준은 동일하게 결정된다. 즉, 사회무차별곡선과 대효용가능곡선은 항상 45도선에서 접하고 여기에 맞추어 소득분배도 일어나므로 이 때 가중치 a의 크기가 결정된다. 이것이 사회적 선택의 2차적 불가능성이다. 즉, 애로우의 사회적 무차별곡선이 존재한다 하여도 사회 구성원의 효용수준을 달리하는 사회적 선택은 불가능하다.

Ⅸ. 일반적 경우

앞에서는 $\rho = 1$인 경우를 예로 다루었으므로 식 (2)에는 $\rho = 1$이 적용되었고 식 (14)에는 $\rho' = 1$이 적용되었다. 이제 일반적인 경우로 돌아가자. 그러면 식 (2)에는 $-1 < \rho < \infty$와 식 (13)에는 $-1 < \rho' < \infty$가 적용된다. 동일한 논의를 거치면 12개의 식에 14개의 미지수로 구성된 연립방정식체계가 된다. 이 때 규범적 가치판단으로 부여하는 가중치 a와 a'가 외생적으로 주어지면 12개의 식에 12개의 미지수로 구성된다. 다음의 식을 얻는다.

$$\frac{k_1'}{k_2'} = \frac{a}{1-a}\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^{\rho+1} = \frac{a'}{1-a'}\left(\frac{W_2}{W_1}\right)^{\rho'+1} = \frac{k_1}{k_2} \tag{25}$$

$$\frac{a'}{1-a'} = \frac{k_1}{k_2}\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^{\rho+1} = \frac{k_1'}{k_2'}\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^{\rho'+1} = \frac{a}{1-a} \tag{26}$$

이로부터 우리는 다음의 식 (27)을 얻는다.

$$U_1 = U_2 \text{와 } W_1 = W_2 \tag{27}$$

이것은 식 (24)와 동일하므로 일반적인 경우에도 개인 사이에 다른 효용의 분포는 불가능하다. 특히 외생적으로 규범적 가치판단으로 부여하는 가중치 a나 a'에 상관없이 불가능하다.

X. 맺는 말

본 논문은 애로우의 불가능성 정리에 규범적 가중치를 부여한 사회무차별곡선이 존재한다 하여도 사회 구성원의 효용수준을 달리하는 사회적 선택이 불가능함을 보였다. 그러나 증명은 충분조건에 불과하고 필요조건은 아니다. 필요조건을 도입하여 사회적 선택이 가능할 수 있는 가능성을 보이는 것은 다음 과제이다.

◈ 참 고 문 헌 ◈

1. 김학은, "유통속도의 부문별 분할 I", 「연세경제연구」, V(2), 1998, pp. 101~128.
2. Arrow, K. J., *Social Choice and Individual Values*, New York : Wiley, 1951.
3. Henderson, J. M. and R. E. Quandt, *Microeconomic Theory*, New York : McGraw-Hill, 1970.
4. Kreps, D., *A Course in Microeconomic Theory*, Princeton : Princeton University Press, 1990.
5. Mossin, J., *The Economic Efficiency of Financial Markets*, New York : Lexington,

1977.
6. Varian, H. R., *Microeconomic Analysis*, New York : Norton, 1978.