

비정상 오차항을 갖는 연속시간모형 회귀분석과 주가지수 동조화

정민수*

요약

본 연구에서는 연속시간 회귀모형에서 오차항이 정상성(stationarity)을 갖지 않는 경우의 추정량에 대해 분석한다. 이산시간 $I(1)$ 과정의 경우 이미 Choi, Hu and Ogaki(2008)에서 다루었지만, 연속시간 모형은 단순한 $I(1)$ 을 기준으로 분석한 결과와는 다르게 모형의 특성에 따라 상이한 결과들이 다양하게 나타난다. 연속시간 모형은 이산시간 모형과는 달리 조건에 따라 OLS(ordinary least squares) 추정량이 일치성(consistency)을 갖기도 하고 GLS(generalized least squares) 추정량이 비일치성을 갖는 경우도 존재하게 되는데, 본 연구에서는 두 추정량이 일치성을 지닐 조건을 각각 도출하고 각 조건들의 의미를 살펴본다. 또한 한국과 미국의 주가지수 동조화 분석에 본 연구의 회귀모형을 적용하여, 기존의 공적분(cointegration) 분석이나 수익률모형 분석은 시계열의 추세적인 연관성을 설명하는데 충분하지 않을 수도 있음을 보인다.

주제분류 : B030104

핵심 주제어 : 확산과정, 연속시간모형, 비정상 오차항, 회귀분석, 일치성

I. 서론

설명변수와 피설명변수가 비정상(nonstationary) 시계열일 때의 회귀분석은 일반적으로 공적분(cointegration) 관계를 상정하고 분석한다. 하지만 많은 경제·금융 시계열 자료는 분명히 서로 연관성을 가지고 있을 것으로 예상되는 경우에도 통계적으로는 공적분 관계를 갖지 않는 것으로 나타

* 연세대학교 원주캠퍼스 정경대학 경제학과 조교수, e-mail: mssjong@yonsei.ac.kr

나는 경우가 많다. 예를 들어 비정상 측정오차가 있는 경우 화폐 공급량과 유동성 선호는 공적분 관계를 나타내지 않을 수 있고,¹⁾ 또한 경제적으로 인접한 서로 다른 국가의 주가지수도 분명 서로 관련성이 있으리라 예상되지만 대부분 공적분 관계를 나타내지는 않는다. 공적분이 존재하지 않는 경우 보통 수익률이나 차분 모형으로 변형하여 분석하지만, 차분을 하게 되면 잃게 되는 정보들이 존재하기 때문에 완벽한 대체분석이라 하기 어렵다. 이와 같이 개념상 분명 연관성이 존재함에도 불구하고 측정오차나 생략된 변수 등의 영향으로 오차항에 비정상성이 발생하는 경우의 회귀분석을 Choi, Hu and Ogaki(2008)에서는 구조적 가성회귀(structural spurious regression) 모형이라 부르고 해당 추정량의 특성을 분석하였다.²⁾

이렇듯 Choi, Hu and Ogaki(2008)에서 구조적 가성회귀 모형의 이론적 특성에 대해 다루었지만, 이들은 설명변수가 $I(1)$ 누적과정(integrated process)인 이산시간 모형만을 고려하고 있어 적용 가능한 시계열 모형이 제한적이다. 이에 본 연구에서는 Choi, Hu and Ogaki(2008)의 결과를 확장하여, 연속시간 모형의 마코프(Markov) 과정을 대표하는 확산과정(diffusion process)을 분석할 수 있도록 한다. 확산과정의 가장 기본적인 형태인 브라운 운동(Brownian motion)의 경우는 Choi, Hu and Ogaki(2008)에서 다룬 1차 누적과정과 유사한 특성을 지니며, 해당 추정량 역시 동일한 특성을 지닌다. 하지만 일반적인 확산과정의 경우는 Jeong and Park(2013)에서 보였듯 속력밀도(speed density)의 차수에 따라 단순한 $I(1)$ 과는 다른 다양한 특성이 나타나며,³⁾ 따라서 이는 확산과정을 분석하기 위해서는 기존의 Choi, Hu and Ogaki(2008)의 분석과는 다른 새로운 연구가 필요함을 의미한다.

이산시간모형의 구조적 가성회귀 이론을 연속시간모형으로 확장하는 것이 단순히 유사한 결과의 반복이 아니라, 그 자체로서도 중요한 의미를 지니는 이유로 다음과 같은 세가지 이유를 들어볼 수 있다. 먼저 이산시간모

1) Choi, Hu and Ogaki, 2008 참조.

2) 이론적 측면에서 비정상 오차항을 다루는 최근 연구는 많지 않지만, 패널모형의 경우 Trapani(2012)와 Baltagi, Kao and Liu(2016) 등에서 오차항에 비정상성이 존재하는 경우를 다루고 있다.

3) 대표적으로 가정 2에서 λ_X 와 λ_U 로 표기한 확률과정 X 와 U 의 수렴차수의 차이를 들 수 있다.

형에서는 비정상 시계열이 있는 경우 차분된 자료를 기준으로 새로운 이산 시간모형을 설정해서 분석을 수행할 수 있지만, 연속시간모형의 경우는 단지 차분만 해서 더 이상 연속시간모형으로서의 의미를 상실하게 된다. 예를 들어 주가지수를 확산과정으로 모형화하였다고 했을 때, 주가지수의 차분이나 주가지수의 수익률 과정은 더 이상 그 자체로는 확산과정이 아니게 된다. 물론 그 자체로 확산과정은 아닐지라도 차분이나 수익률에 대한 별도의 모형을 상정하여 분석을 수행할 수도 있지만, 그로부터 나온 결과는 관측빈도가 달라짐에 따라 사실상 다른 모형으로부터 나온 결과가 된다. 따라서 연속시간 차분 모형의 경우 관측 빈도에 따라 매번 새롭게 분석해야하기 때문에 이론으로서의 일반성을 유지하기 힘들게 된다.

두번째 이유로 들 수 있는 것은 확산과정의 특성으로부터 기인하는 보다 본질적인 차별점이라 할 수 있는데, 확산모형의 경우 Kim and Park (2014)에서 제시하였듯 정상성과 평균회귀성에 대한 조건이 항상 일치하는 것은 아니다. 자료가 평균회귀의 특성을 보인다고 해서 반드시 정상성을 지니는 모형은 아닐 수도 있는 것이다. 따라서 확산모형의 경우 평균회귀 특성을 보이는 자료를 분석할 때라도 비차분모형을 써야할지 차분모형을 써야할지 모호해질 수 있고, 각 경우 과연 추정은 제대로 될 것인가도 불명확해진다. 그러므로 어떤 조건 하에서 일반적인 회귀분석을 적용해도 괜찮은지, 아니면 어떤 상황에서 차분 추정량을 써야하는지 이론적으로 명확히 해둘 필요가 있다.

세번째 이유 역시 확산모형의 시계열적 특성에 기인하는 것으로, 비정상성을 갖는 확산모형은 단순히 $I(1)$ 이나 $I(0)$ 의 특성을 갖는 모형으로 양분하여 나눌 수 있는 것이 아니라, 동일한 모형이라도 모수의 값에 따라 $I(0)$ 와 $I(1)$ 사이, 또는 $I(1)$ 이상의 수렴차수를 가질 수 있다. 따라서 단지 $I(1)$ 의 특성만을 다루고 있는 Choi, Hu and Ogaki(2008)의 결과를 바로 연속시간 모형에 적용하기에는 불충분하고, 모형의 특성에 따라 실제 확산모형에 적용했을 때 어떤 조건이 필요한 것인지 명확히 해 줄 필요가 있다.

이에 본 연구에서는 연속시간 모형에서 설명변수가 확산과정을 따르는 경우의 회귀모형 추정량의 특성을 분석하였다. 분석 결과 오차항에 비정상성이 있는 경우 Choi, Hu and Ogaki(2008)의 결과와 유사하게 OLS

(ordinary least squares) 추정량은 일반적으로 일치성(consistency)을 잃게 되고, 추정량의 분포 역시 더 이상 정규분포를 따르지 않고 Jeong and Park(2013)에서 보인 바와 유사하게 일반화된 디키-풀러(generalized Dickey-Fuller) 유형의 분포를 따르게 됨을 보일 수 있었다. 하지만 본 연구에서 추가적으로 보일 수 있었던, 연속시간 모형이 Choi, Hu and Ogaki(2008)의 결과와 한 가지 달라지는 점은, 비정상 과정이라도 오차항의 수렴차수가 설명변수의 수렴차수보다 작기만 하다면 OLS 추정량도 일치성을 얻을 수 있다는 것이다.

한편 일반적인 OLS 추정량이 일치성을 잃게되는 경우에도 Choi, Hu and Ogaki(2008)에서와 같이 GLS(generalized least squares) 차분 필터를 이용하여 계수를 추정한다면 일치 추정량을 얻을 수 있다. 하지만 본 연구에서 추가적으로 보일 수 있었던 것은, 확산과정 회귀분석의 경우 Choi, Hu and Ogaki(2008)의 결과와는 다르게 오차항의 수렴차수가 설명변수의 수렴차수 대비 아주 크게 되면 GLS 추정량을 사용한다고 해도 일치성을 보장할 수 없게된다는 점이다. 피설명변수의 수렴차수가 설명변수의 수렴차수보다 큰 경우가 이에 해당할 가능성이 큰데, 따라서 이러한 경우에는 OLS도 GLS도 아닌 MLE 등의 다른 추정법을 사용해야만 정확한 추정값을 얻을 수 있을 것이다.

또한 위의 두 결과에 추가해서 본 연구에서 새롭게 보일 수 있었던 것은, 연속시간 모형 회귀분석의 경우 OLS 추정량과 비교해서 GLS 추정량은 일치성 조건에 관측기간 뿐만 아니라 관측빈도도 영향을 주게 된다는 점이다. OLS 추정량은 일치성이 있는 경우라도 관측빈도 증가가 추정량의 정확도 향상에 전혀 도움이 되지 않지만, GLS 추정량의 경우는 관측기간이 증가하지 않는 상황이라고 해도 관측빈도만 높아진다면 보다 정확한 추정값을 얻을 수 있다. 이는 금융자료 분석에 많이 쓰이는 일중(intraday) 고빈도(high-frequency) 자료를 가지고 추정을 할 때, GLS 추정량을 이용한다면 보다 정확한 추정값을 얻을 수도 있다는 것을 의미한다. 그리고 마지막으로 실증분석을 위해 한국과 미국의 주가지수 동조화 분석을 재조명 해보았는데, 본 연구의 회귀분석을 통해 일반적인 공적분 분석이나 수익률 모형으로는 파악하기 힘든 추세적 연관성에 대한 추가적인 해석을 제공할 수도 있음을 보였다.

이후 논문의 구성은 제II장에서 본 연구에서 다룰 연속시간 회귀모형과 추정량을 정의하고, 제III장에서는 각 추정량의 극한이론을 도출한다. 제IV장에서는 도출한 극한이론에 대한 유한포본 분석을, 제V장에서는 국가간 주가지수 동조화에 대한 실증분석 제시한다. 그리고 마지막으로 제VI장에서는 연구의 결과에 대해 정리한다.

II. 회귀모형과 추정량

1. 연속시간 회귀모형

본 연구에서는 Choi, Hu and Ogaki(2008)를 따라 다음과 같은 회귀식을 상정하여 분석한다.⁴⁾

$$Y_t = \beta X_t + U_t \quad (1)$$

이 때 위 회귀식의 설명변수 X 와 오차항 U 는, 서로 독립인 표준 브라운운동 W 와 V 에 대해 다음과 같은 확산모형을 따른다고 가정한다.

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \\ dU_t &= \omega(U_t)dW_t, \quad \mathbb{E}(U_0) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

이와 같이 U 가 마팅게일(martingale)이고 W 와 V 가 독립인 경우 다음과 같이 피설명변수의 설명변수에 대한 조건부 기대값은 설명변수의 선형함수로 표현된다.

$$\mathbb{E}(Y_t | \mathcal{F}_t) = \beta \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(U_t | \mathcal{F}_t) = \beta X_t$$

4) 비정상 확률과정과 같이 평균이 정의되지 않는 모형의 경우는 회귀식에서 상수항의 이론적 의미가 없으므로 생략하는 것이 타당할 것이다.

이 때 \mathcal{F}_t 은 t 시점까지 X 로부터 주어진 정보집합(filtration)을 의미한다. 따라서 (1)의 회귀식은 일반적인 회귀모형과 마찬가지로 피설명변수 Y 를 설명변수 X 로 설명되는 부분과 그렇지 않은 부분으로 분해한 것이라 생각할 수 있다.

X 와 U 가 모두 양재귀(positive recurrent)인 경우 기존의 정상시계열에 대한 수렴이론을 가지고 분석이 가능하며, X 가 영재귀(null recurrent)이고 U 가 양재귀인 경우는 이산시간 모형의 공적분에 해당한다고 할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 X 와 U 가 모두 영재귀인 경우만 고려하도록 한다.⁵⁾ U 가 영재귀인 경우 X 와 Y 간에 공적분이 없다는 것을 의미하는데, 이 경우 회귀모형의 해석은 계수 β 가 모형상 명시적인 의미를 가진다기 보다는, 피설명변수인 Y 를 설명변수인 X 로 설명되는 부분과 설명되지 않는 부분으로 분해한다는 개념으로만 해석하는 것이 더 적절할 수도 있다.

앞서 언급하였듯 영재귀 확산모형에 대한 회귀분석은 이산시간 모형의 $I(1)$ 확률과정에 대한 결과만 가지고서는 불충분하다. 일반적으로 이산시간 모형에서는 확률과정의 정상성이 의심되는 경우 차분을 취해서 분석을 진행하게 된다. 하지만 연속시간모형의 경우, 영재귀 확산모형은 차분을 취한다고 해서 그 차분 과정이 항상 양재귀가 되는 것은 아니다. 따라서 영재귀 확산모형의 분석을 위해 무작정 차분모형을 고려하는 것은 적절하지 않고, 올바른 추정을 위해서는 이에 대한 추가적인 분석이 필요하다.

2. 관측자료와 추정량

추정을 위한 자료는 Δ 의 간격으로 총 n 개의 표본이 주어졌다고 하자. 즉 다음과 같은 n 개의 표본이 주어져 있으며 이 때 총 표본기간은 $T = n\Delta$ 로 표기한다.

$$X_{\Delta}, X_{2\Delta}, \dots, X_{n\Delta}$$

본 논문에서는 다음과 같은 두 가지 추정량을 고려한다. 첫번째는 일반적인

5) 확산과정의 양재귀와 영재귀 특성과 조건에 대해서는 Jeong and Park(2013)를 참조할 수 있다.

회귀분석에 사용되는 OLS 추정량이고, 두번째는 Choi, Hu and Ogaki (2008)에서 제시한 것과 같은 GLS 필터를 거친 차분 추정량이다. GLS 필터 개념의 차분 추정량은 Choi, Hu and Ogaki(2008)에서 비정상 오차항 모형을 다루기 위해 소개한 추정량으로,⁶⁾ 본 논문의 모형에서도 뒤의 III장에서 확인할 수 있듯이 대부분의 경우 일치성을 갖는다. 본 연구에서 분석할 OLS 추정량은

$$\hat{\beta}_{OLS} = \frac{\sum_{i=1}^n X_{i\Delta} Y_{i\Delta}}{\sum_{i=1}^n X_{i\Delta}^2}$$

와 같이 정의하도록 한다. GLS 추정량은 이산시간모형의 관점에서 오차항에 자기회귀가 있는 경우의 GLS 추정량을 사용하였는데, 오차항의 자기회귀 계수가 1인 경우, 즉 오차항이 $I(1)$ 인 경우의 GLS 추정량은

$$\hat{\beta}_{GLS} = \frac{\sum_{i=2}^n (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta})(Y_{i\Delta} - Y_{(i-1)\Delta})}{\sum_{i=2}^n (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta})^2}$$

와 같이 차분 추정량과 일치하게 된다.⁷⁾

III. 극한이론

본 장에서는 앞서 소개한 OLS와 GLS 추정량의 극한분포를 도출한다. 시작하기 전에 앞으로 많이 쓰이게 될 기호들에 대해 몇가지 정의하자면, 두 함수 $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대해 x 가 함수의 정의역 D 의 경계(boundary)로

6) 본 연구에서는 모형 (1)의 관점에서 보았을 때 상수 $\delta > 0$ 에 대해 $dU_t = \delta dV_t$ 와 같이 U 의 순간 변동성(instantaneous volatility)이 일정하다고 가정하였을 때의 GLS 추정량에 해당한다.

7) 차분 추정량은 Buse(1973)의 GLS 표기에서 공분산 행렬 $V = \{v_{ij}\}$ 가 $v_{ij} = \sigma^2 \min(i, j)$ 로 주어지는 경우라고 할 수 있다. 이는 차분 변환행렬(X_1 유지)을 T 라고 하였을 때 $T' T = \sigma^2 V^{-1}$ 의 관계식이 성립하기 때문이다.

접근할 때 $g(x)/f(x) \rightarrow 0$ 가 성립하면 $f \gg g$ 로 표기하고, $g(x)/f(x) \rightarrow 1$ 이 성립하면 $f \sim g$ 로 표기한다. 그리고 \approx 기호는 설명의 편의를 위해 이론적인 설명 없이 단지 우변을 좌변의 근사(approximate)로 표기하고자 할 때 사용하기로 한다. 또한 함수의 도함수는 전치행렬과의 혼동을 피하기 위해 $f'(x) = \partial f(x)/\partial x$, $f''(x) = \partial^2 f(x)/\partial x^2$ 와 같이 표기하기로 한다.

1. 가정

앞 장에서 소개한 OLS와 GLS 추정량의 극한분포를 도출하기 위해 다음을 가정한다.

가정 1 (a) 각 함수의 정의역 상에 있는 모든 x 에 대해 $\sigma(x) > 0$, $\omega(x) > 0$ 이다. (b) μ , σ , ω 가 국소적 유계(locally bounded)이며 정칙변동성(regular variation)을 지닌다.⁸⁾ 또한 모든 $x \neq 0$ 에 대해 $T \rightarrow \infty$ 함에 따라 다음이 성립하도록 하는 λ_σ , λ_ω 와 $\bar{\sigma}$, $\bar{\omega}$ 가 존재한다.

$$\frac{\sigma(Tx)}{\lambda_\sigma(T)} \rightarrow \bar{\sigma}(x), \quad \frac{\omega(Tx)}{\lambda_\omega(T)} \rightarrow \bar{\omega}(x)$$

가정 2 X^T 와 U^T 를 다음과 같이 정의하였을 때

$$\frac{1}{\lambda_X(T)} X_{Tt} = X_t^T, \quad \frac{1}{\lambda_U(T)} U_{Tt} = U_t^T$$

$T \rightarrow \infty$ 함에 따라 $X^T \rightarrow_d X^\circ$ 와 $U^T \rightarrow_d U^\circ$ 가 성립하도록 하는 $\lambda_X(T) \rightarrow \infty$,와 $\lambda_U(T) \rightarrow \infty$ 가 존재한다.⁹⁾ 또한 $T > 0$ 에 대해 고르게

8) 함수의 정칙변동성에 대해서는 Bingham, Goldie and Teugels(1993) 참조.

9) 만약 λ_X 와 λ_U 가 다르다면, 즉 설명변수와 오차항의 수렴차수가 다르다면 X 가 증가함에 따라 피설명변수에서 설명변수가 차지하는 비중이 달라질 것이다. X 의 수렴차수가 U 의 수렴차수보다 큰 경우 피설명변수에서 오차항의 영향은 점차 사라질 것이고, 반대의 경우라면 피설명변수에서 설명변수의 영향력이 점차 사라지는 모형이 될 것이다.

(uniformly)

$$\mathbb{E}|X_1^T|^k < \infty, \mathbb{E}|U_1^T|^k < \infty$$

이 성립하도록 하는 $k > 1$ 이 존재한다.

가정 3 다음을 만족하는 $p > 0$ 와 $q > 0$ 가 존재한다. (i) $\lambda_X(T) \ll T^q$. $\lambda_U(T) \ll T^q$. (ii) $\mu(T) \ll T^p$, $\sigma(T) \ll T^p$. $\omega(T) \ll T^p$

가정 4 $T \rightarrow \infty$ 이고 $\Delta \rightarrow 0$ 일 때 $\Delta T^{spq+1} \rightarrow 0$ 이 성립한다.

위의 가정들은 모두 Jeong and Park(2013)에서 설정한 것과 유사한 성격의 가정들이다. 가정 1은 확산과정을 구성하는 함수들에 대한 정규성(regularity) 조건들이고, 실증분석에 사용되는 확산과정들은 거의 모두 이 가정을 만족함을 어렵지 않게 확인할 수 있다. 가정 2 역시 일반적인 영재귀 확산과정에 대해 모두 성립함을 Jeong and Park(2013)에서 보였고, 가정 3은 각 함수들이 가장자리에서 멱함수 차수보다 같거나 작아야할 것을 요구하는 것으로, 역시 실증분석에 쓰이는 일반적인 확산과정은 모두 이 조건을 만족한다. 가정 4는 관측기간이 증가하는 속도에 비해 관측빈도가 훨씬 더 빠르게 증가해야한다는 의미로, Jeong and Park(2013)에서 언급하였듯 상대적으로 관측기간에 비해 관측빈도가 높은 고빈도 자료에 본 연구의 분석이 적합함을 의미한다.

2. 극한분포

본 절에서는 앞서 소개한 OLS와 GLS 추정량의 극한분포를 도출한다. 극한분포 도출시 회귀모형의 계수 β 의 참값은 β_0 라고 표기하기로 한다.

(1) OLS 추정량

OLS 추정량은 다음과 같이 근사할 수 있으며

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{OLS} &= \beta_0 + \frac{\Delta \sum_{i=1}^n X_{i\Delta} U_{i\Delta}}{\Delta \sum_{i=1}^n X_{i\Delta}^2} \approx \beta_0 + \frac{\int_0^T X_t U_t dt}{\int_0^T X_t^2 dt} \\ &= \beta_0 + \frac{\lambda_U(T)}{\lambda_X(T)} \frac{\int_0^1 X_t^T U_t^T dt}{\int_0^1 X_t^{T2} dt}\end{aligned}$$

이에 따라 다음의 정리를 도출할 수 있다.

정리 1 가정 1-4이 성립한다고 하자. $\lambda_X(T) \gg \lambda_U(T)$ 인 경우 $T \rightarrow \infty$ 이고 $\Delta \rightarrow 0$ 함에 따라 다음이 성립한다.

$$\frac{\lambda_X(T)}{\lambda_U(T)} (\hat{\beta}_{OLS} - \beta_0) \rightarrow_d \frac{\int_0^1 X_t^\circ U_t^\circ dt}{\int_0^1 X_t^{\circ 2} dt}$$

따라서 $\lambda_X(T) \gg \lambda_U(T)$ 인 경우 $\hat{\beta}_0$ 은 일치성을 지니게 된다. 이로부터 항상 비일치성을 갖는 이산시간 모형의 $I(1)$ 확률과정에 대한 Choi, Hu and Ogaki(2008)의 결과와는 달리, 연속시간 모형에서의 확산모형의 경우 일반적인 OLS 추정량이라도 일치성을 갖는 경우도 있다는 것을 확인할 수 있다. 이 때 $\lambda_X(T) \gg \lambda_U(T)$ 라는 의미는 회귀식에서 설명변수의 수렴차수보다 오차항의 수렴차수가 더 작다는 의미가 된다. 따라서 이 경우 관측기간이 증가함에 따라 결국 피설명변수에서 오차항의 비중이 사라지게 된다는 것을 의미하므로 자연스러운 결과라 하겠다. 단지 이 경우 추정량의 극한분포는 정규분포가 아닌 Jeong and Park(2013)에서 언급한 것과 유사한 일반화된 디키-풀러 유형의 분포를 따르게 된다.

반면 $\lambda_U(T)$ 의 증가율이 $\lambda_X(T)$ 의 증가율과 같거나 높은 경우, Choi, Hu and Ogaki(2008)에서의 결과와 같이 OLS 추정량은 참값으로 수렴하지 않게 된다. 즉, 만약 Y 의 수렴차수가 X 의 수렴차수보다 큰 경우라면

OLS 추정량은 항상 일치성을 잃게 되고, Y 와 X 의 수렴차수가 동일한 경우 OLS 추정량의 일치성 여부는 오차항의 수렴차수에 따라 달라지게 된다. 단지 후자의 경우 오차항 자체는 일반적으로 관측되지 않으므로, 자료로부터 직접적으로 OLS 추정량의 일치성을 판별하기는 어려운 것이다.

(2) GLS 추정량

GLS 추정량은 다음과 같이 정리할 수 있으며

$$\hat{\beta}_{GLS} = \beta_0 + \frac{\sum_{i=1}^n (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta})(U_{i\Delta} - U_{(i-1)\Delta})}{\sum_{i=1}^n (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta})^2}$$

확산모형의 특성을 이용하면 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\begin{aligned} X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta} &= \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \mu(X_s) ds + \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \sigma(X_s) dW_s \\ &\approx \sigma(X_{(i-1)\Delta})(W_{i\Delta} - W_{(i-1)\Delta}), \\ U_{i\Delta} - U_{(i-1)\Delta} &= \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \omega(U_s) dV_s \\ &\approx \omega(U_{(i-1)\Delta})(V_{i\Delta} - V_{(i-1)\Delta}) \end{aligned} \quad (3)$$

또한 Z 를 표준 브라운 운동이라고 했을 때, 함수적 중심극한정리에 의해 $t \in [0, T]$ 에 대해

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i=1}^{\lfloor t/\Delta \rfloor} (W_{i\Delta} - W_{(i-1)\Delta})(V_{i\Delta} - V_{(i-1)\Delta}) \approx Z_t \quad (4)$$

와 같은 근사가 가능하다.¹⁰⁾ 따라서 $Z_t^T = T^{-1/2} Z_{Tt}$ 와 같이 표기하면, (3)과 (4)에 따라

10) 보조정리 3 참조.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{GLS} &\approx \beta_0 + \frac{\sum_{i=1}^n \sigma(X_{(i-1)\Delta}) \omega(U_{(i-1)\Delta}) (W_{i\Delta} - W_{(i-1)\Delta}) (V_{i\Delta} - V_{(i-1)\Delta})}{\sum_{i=1}^n \sigma^2(X_{(i-1)\Delta}) (W_{i\Delta} - W_{(i-1)\Delta})^2} \\ &\approx \beta_0 + \frac{\sqrt{\Delta} \int_0^T \sigma(X_t) \omega(U_t) dZ_t}{\int_0^T \sigma^2(X_t) dt} \\ &\approx \beta_0 + \frac{\sqrt{\Delta} (\lambda_\omega \circ \lambda_U)(T) \int_0^1 \bar{\sigma}(X_t^T) \bar{\omega}(U_t^T) dZ_t^T}{\sqrt{T} (\lambda_\sigma \circ \lambda_X)(T) \int_0^1 \bar{\sigma}^2(X_t^T) dt} \end{aligned}$$

와 같은 근사가 가능하고, 또한 추세항이 없는 확산모형의 특성에 따라 $\sqrt{T} \lambda_U(T) \sim (\lambda_\omega \circ \lambda_U)(T)$ 가 성립하므로 다음의 정리를 도출할 수 있다.

정리 2 가정 1-4이 성립한다고 하자. $\sqrt{\Delta} \lambda_U(T) / (T(\lambda_\sigma \circ \lambda_X)(T)) \rightarrow 0$ 이라고 하면, $T \rightarrow \infty$ 이고 $\Delta \rightarrow 0$ 함에 따라 다음이 성립한다.

$$\frac{T(\lambda_\sigma \circ \lambda_X)(T)}{\sqrt{\Delta} \lambda_U(T)} (\hat{\beta}_{GLS} - \beta_0) \rightarrow_d \frac{\int_0^1 \bar{\sigma}(X_t^\circ) \bar{\omega}(U_t^\circ) dZ_t^\circ}{\int_0^1 \bar{\sigma}^2(X_t^\circ) dt}$$

이 때 Z° 는 X°, U° 와 독립인 표준 브라운 운동이다.

따라서 $\sqrt{\Delta} \lambda_U(T) / (T(\lambda_\sigma \circ \lambda_X)(T)) \rightarrow 0$ 의 조건이 충족된다면 $\hat{\beta}_{GLS}$ 는 항상 일치성을 지니게 된다. 즉, 연속시간모형의 경우도 적절한 조건만 만족한다면 이산시간모형의 경우와 마찬가지로 차분을 하여 추정하였을 때 정확한 추정을 할 수 있게됨을 알 수 있다. 또한 정규분포를 따르지 않는 OLS 추정량의 극한분포와는 다르게 GLS 추정량의 극한분포는

$$\frac{\int_0^1 \bar{\sigma}(X_t^\circ) \bar{\omega}(U_t^\circ) dZ_t^\circ}{\int_0^1 \bar{\sigma}^2(X_t^\circ) dt} =_d \text{MN} \left(0, \frac{\int_0^1 \bar{\sigma}^2(X_t^\circ) \bar{\omega}^2(U_t^\circ) dt}{\left(\int_0^1 \bar{\sigma}^2(X_t^\circ) dt \right)^2} \right)$$

와 같이 혼합정규분포를 따르기 때문에 $\hat{\beta}_{GLS}$ 의 t -검정량은 표준정규분포를 따르게 되어 일반적인 t -검정 방법으로도 일치성 있는 검정을 할 수 있을 것이다.

본 연구의 결과가 Choi, Hu and Ogaki(2008)의 이산시간 모형의 경우와 비교하여 달라지는 점은, 먼저 추정량의 수렴속도를 결정하는데 단순한 X 의 수렴차수 이상의 세부적인 특성이 중요해진다는 것이다. 추정량의 수렴속도에 X 의 확산함수인 σ^2 가 영향을 미치게 되는데, 이는 GLS 추정량의 수렴속도가 단지 X 와 U 자체의 수렴차수뿐만 아니라 보다 세부적인 X 의 특성이라고 할 수 있는 σ^2 의 형태에도 영향을 받는다는 것을 의미한다.

또한, 확산모형의 경우 이산시간 모형과 달라지는 두번째 특징은, 확산모형의 GLS 추정량은 OLS 추정량과는 다르게 표본기간이 증가하거나 표본빈도가 증가하거나 둘 중 하나의 조건만 충족되어도 일치성을 보이게 된다는 것이다. 앞의 정리 1를 보면, OLS 추정량의 경우 일치성을 갖는 경우라도 표본기간은 늘어나지 않고 표본추출간격만 줄어드는 상황이라면 아무리 표본수가 증가한다고 해도 추정량은 일치성을 갖지 못하게 된다. 이는 정리 2에 나타나는 GLS 추정량의 특성과의 중요한 차이점이라 하겠다.

(3) GLS 추정량의 일치성 조건

정리 2에서 알 수 있듯, 단순한 $I(1)$ 을 가정한 이산시간 모형과 다르게 확산모형의 경우는 GLS 추정량이라도 X 와 U 간의 수렴차수 격차가 너무 크게 되면 일치성을 잃게 될 수 있다. 보다 정확하게는 $\sqrt{\Delta} \lambda_U(T)/(T(\lambda_\sigma \circ \lambda_X)(T)) \rightarrow 0$ 이 성립하지 않는 경우 OLS와 GLS 추정량 모두 일치성을 잃게 될 것이다. 따라서 이러한 상황이 의심될 때에는 MLE 등의 추정량을 사용해야 할 것이다.¹¹⁾ 관측빈도가 빠르게 증가한다고 볼 수 있는 경우, 즉 고빈도 자료를 이용할 경우에는 위와 같은 비일치성에 대한 우려가 적다고 할 수 있다. 하지만 관측빈도가 충분히 높지 않아 극단적으로 만약 관측빈도가 고정되어있다고 상정하고 분석하는 것이 타당한 경우라면, $\lambda_U(T)/(T(\lambda_\sigma \circ \lambda_X)(T)) \rightarrow 0$ 이 아닐 경우 OLS 추정량 뿐만 아니라

11) MLE 추정을 위해서는 오차항에 대한 가정이 추가적으로 필요할 것이다.

GLS 추정량도 일치성을 잃게 된다.

정리 2의 일치성 조건을 정리 1의 조건과 직관적으로 직접 비교하기는 어렵지만, 일반적으로 정리 2의 조건은 정리 1의 조건에 대해 충분조건이 된다. 추세항이 없는 확산모형의 경우라면 비교가 좀 더 명확한데, 만약 정리 2에서 설명변수인 X 가 추세항이 없는 단순한 마팅계일 확산모형이라면 $\sqrt{T}\lambda_X(T) \sim (\lambda_\sigma \circ \lambda_X)(T)$ 가 성립하므로 $\hat{\beta}_{GLS}$ 의 수렴속도는 다음과 같이 단순화될 수 있다.

$$\frac{\sqrt{T}\lambda_X(T)}{\sqrt{\Delta}\lambda_U(T)}(\hat{\beta}_{GLS} - \beta_0) \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 \bar{\sigma}(X_t^\circ) \bar{\omega}(U_t^\circ) dZ_t^\circ}{\int_0^1 \bar{\sigma}^2(X_t^\circ) dt}$$

이로부터 기본적으로 GLS 추정량은 오차항 U 의 수렴차수가 설명변수 X 의 수렴차수와 비교해서 충분히 작기만 하면 일치성을 유지할 수 있을 것이라는 것을 짐작할 수 있다. 즉 단순화하여 설명하자면, Y 와 X 의 수렴차수가 비슷할 때는 일치성에 대한 우려가 없지만, 만약 Y 의 수렴차수가 X 의 수렴차수 대비 \sqrt{T} 이상으로 큰 격차를 보인다면 일치성에 대해 유의할 필요가 있겠다.

IV. 유한표본 분석

본 장에서는 III장에서 도출한 극한이론을 유한표본 분석을 통해 확인해 보기로 한다. 분석을 위한 모형으로는 마팅계일 확산모형 중, 단순하면서도 극한이론에 중요한 역할을 하는 수렴차수를 자유롭게 설정할 수 있는 다음과 같은 모형을 사용하였다.¹²⁾

$$dX_t = (\delta_1 + \delta_2 |X_t|)^{\delta_3} dW_t$$

12) 확산항의 이러한 함수 형태는 Duffie, Pan and Singleton(2000)의 아핀(affine) 모형 확산항 형태를 멱함수 꼴로 확장한 것이다.

또한 오차항 역시 동일하게

$$dU_t = (d_1 + d_2 | U_t |)^{d_3} dV_t$$

와 같이 설정하도록 한다. 시뮬레이션을 위한 모수의 값은 현실적인 예시를 위해 V장의 추정값을 참조하여 $\delta_1 = 0.1$, $\delta_2 = 0.2$, $\delta_3 = -5$, $d_1 = 0.1$, $d_2 = 0.2$, $d_3 = -3$ 과 같이 설정하였다. 이 때 표본 추출의 초기값은, 마찬가지로 V장의 S&P 500과 KOSPI의 실제 값을 참조하여 $X_0 = 7$, $U_0 = 7$ 와 같이 설정하였으며, 추가적으로 오차항의 경우 평균 0의 조건을 만족하도록 하기 위해 $U_t - U_0$ 와 같이 초기값을 차분한 값으로 재정의하여 사용하였다. 표본 기간과 추출 빈도는 $T = 2, 6$, $\Delta = 1/200$ 로 하여 2년과 6년 간의 일별 자료에 상응하도록 하였고, 표본 추출은 밀슈타인(Milstein) 근사를 이용하여 $\Delta = 1/10000$ 의 간격으로 1차 추출한 뒤 $\Delta = 1/200$ 간격으로 재추출하여 근사 오차를 줄이도록 하였다. 그리고 마지막으로 회귀식의 종속변수 Y 는

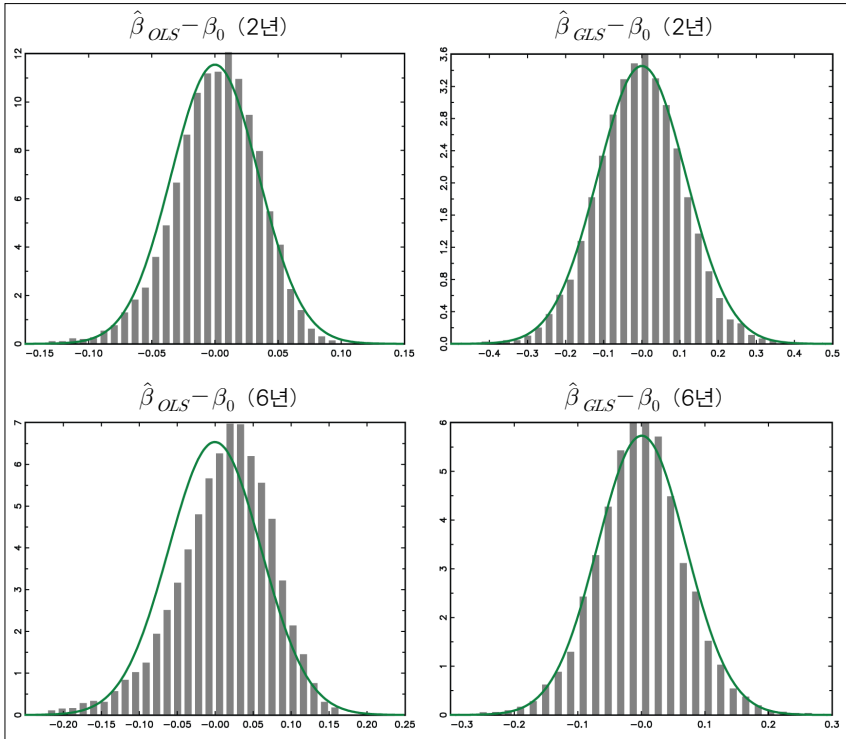
$$Y_t = X_t + U_t$$

와 같이 정의하여 $\beta_0 = 1$ 으로 설정하였다.

총 10000 번의 반복 추정 결과 얻은 OLS와 GLS 추정량의 표본 분포는 <그림 1>과 같으며, 이를 통해 OLS 추정량의 경우 정규분포와 차이를 보이는 한쪽으로 치우친 비표준적 분포를 따르는 것을 확인할 수 있다. 또한 OLS 추정량의 분포는 일반적인 추정량과는 다르게 표본기간 T 가 증가함에 따라 오히려 더 큰 분산을 갖게되는 것을 확인할 수 있는데, 이는 본 시뮬레이션의 예시 모형과 같이 오차항의 수렴차수가 설명변수의 수렴차수보다 더 큰 경우 정리 1로부터 예상할 수 있는 추정량의 발산 특성과 일치한다. 반면 GLS 추정량의 경우는 T 의 증가에 따라 분산이 감소할뿐만 아니라 동일 분산을 갖는 정규분포와 유사한 모습을 보여, 정리 2의 일치성과 극한분포의 정규성이 성립함을 확인할 수 있다.¹³⁾

13) GLS 추정량은 혼합정규분포를 따르므로 정규분포와 비교해서 약간 더 두터운 꼬리

〈그림 1〉 OLS와 GLS 추정량의 유한표본 분포(Finite sample distributions of the OLS and GLS estimators)



주: 녹색 실선은 평균이 0이고 표본분포와 동일한 분산을 갖는 정규분포의 밀도함수.
 Note: Green solid lines are the normal density functions with zero mean and the same variances as the simulated distributions.

V. 국가간 주가지수 동조화

본 장에서는 III장에서 소개한 추정량을 주가지수 자료에 적용하여 국가간 주가지수 동조화에 대한 실증분석을 하도록 한다. 본 분석은 앞 장의 정리에 대한 예시 성격의 분석으로, 그 자체적으로 직접적인 활용성을 갖는 분석이라 보기는 어렵지만 비차분 모형의 필요성에 대한 실질적인 예시로서 적절하다 판단하여 소개하도록 한다.

국가간 주가지수 동조화에 대한 분석은 현재까지 많은 연구가 있어왔는

를 보일 수 있다.

데, 주로 차분 모형에 해당하는 수익률 분석에 초점을 맞추거나, 비차분 모형을 사용할 때에는 공적분의 유무를 통하여 동조화의 여부를 판별하였다. 또한 최근에는 단순한 선형 관계로부터 확장하여 모형에 비선형성이나 구조변화를 도입하여 동조화를 설명하기도 하였다. 국내 자료를 이용한 최근의 연구를 몇 가지 소개하자면, 윤종인(2007)과 노상운(2010)에서는 한국과 북미, 아시아, 유럽 등의 주요 주가지수에 대해 분석하면서, 일반적으로 주가지수간 공적분 관계는 관측되지 않지만 동시에 여러 시계열을 함께 고려할 경우 공적분 관계가 존재할 가능성도 있음을 보였다. 정진호(2007)에서는 수익률에 초점을 맞추어 한국, 중국, 미국의 주가지수 수익률을 AR-GARCH 모형과 VAR 모형을 가지고 분석하였다. 또한 김석진·표영영·도영호(2011)에서는 한국, 중국, 미국의 주가지수 수익률을 GJR-GARCH 모형을 통하여 분석하였고, 안유화(2012)에서는 한국과 중국의 각 주가지수 수익률간의 동조화를 VAR 모형을 통하여 분석하였다. 그리고 최승훈·강상훈(2014)에서는 한국, 중국, 일본, 미국의 수익률을 VAR-EGARCH 모형을 가지고 분석하였다.

이렇듯 현재까지의 연구는 주로 공적분과 수익률 모형에 초점이 맞추어져 있었는데, 본 연구에서는 비차분 모형을 사용하여 기존의 공적분 모형이나 수익률 모형에서 놓칠 수 있는 자료상의 특성이 있는지에 대해 살펴보고자 한다. 분석을 위해 먼저 이론적인 측면에서 자료가 확산모형 회귀분석에 필요한 조건을 충족하는지를 확인해보고, 그 다음으로 동조화 분석을 위해 제한적이지만 비차분모형과 차분모형으로부터 얻을 수 있는 기본 통계량인 R^2 를 주요 비교 대상으로 삼아 분석하도록 한다. 회귀분석 모형은 한국과 미국의 주가지수의 연관성을 분석하기 위해 KOSPI를 피설명변수로, S&P 500을 설명변수로 설정하였다. KOSPI에 대한 S&P 500의 설명력이 2008년 금융위기 이전과 그 이후 새로운 체제가 시작된 뒤 어떻게 달라지는가를 알아보기 위해 전체 기간을 두 기간으로 나누어 분석을 진행하였다. 이전 자료는 2002년 1월부터 2007년 12월까지 6년간의 일별자료를, 이후 자료는 2010년 1월부터 2015년 12월까지 6년간의 일별 자료를 사용하였고,¹⁴⁾ 이때 시차를 고려하여 설명변수에 쓰이는 S&P 500은 KOSPI 일차

14) 추정의 안정성을 위해 주가지수의 변동성이 지나치게 크게 나타나는 2008년과 2009년 자료는 제외하였다.

보다 하루 전의 자료가 대응되도록 하였다. 또한 각 자료는 로그변환을 취하여 로그 주가지수를 기준으로 분석하였다.

1. 설명변수와 피설명변수의 수렴차수

먼저 주가지수 자료가 앞의 III장의 가정을 충족하는지 확인하기 위해 각 시계열의 수렴차수를 추정한다. 확산과정의 수렴차수를 추정하기 위해 적절한 모수적 모형을 설정해볼 수 있는데, 본 연구에서는 IV장에서 소개한 확산함수 모형을 이용하여 설명변수와 피설명변수가 각각 다음의 추세함수와 확산함수를 갖는 확산모형을 따른다고 하고 수렴차수를 추정하였다.

$$\begin{aligned} X(S\&P5000): \mu_X(x) &= \gamma, \quad \sigma_X(x) = (\delta_1 + \delta_2 |x|)^{\delta_2}, \\ X(KOSPI): \mu_Y(x) &= c, \quad \sigma_Y(x) = (d_1 + d_2 |x|)^{d_3} \end{aligned} \quad (5)$$

이와 같이 주가지수가 선형추세만을 가지고 있다고 가정하는 것은 주가지수의 순간 기대수익률이 시간에 대해 일정한 상수값을 지닌다는 의미로 해석할 수 있다. 실제 회귀분석을 위해 이와 같은 추세와 확산항의 함수꼴에 대한 가정이 반드시 필요한 것은 아니지만, 이렇게 모수적 모형을 가정할 경우 이론상의 각 변수의 수렴차수를 계산하는 것이 간편해지기 때문에 본 연구의 예시에서는 이와 같이 분석하였다.

확산모형이 (5)와 같이 주어진 경우, X 와 Y 의 확률과정은 확정적인 선형추세가 전체 시계열의 확률적 요소보다 더 큰 발산속도를 가질 수 있고, 이 때 시계열은 일시적(transient) 과정이 된다. 따라서 본 예시의 회귀분석에서는 각 시계열을 영채귀 과정으로 만들어 회귀분석이 의미있는 모형이 되도록 하기 위해, 각 시계열로부터 선형추세 항을 뺀 자료를 새로운 시계열로 정의하여 분석한다. 즉, 새로운 시계열을 다음과 같이 정의하고

$$X_t^* = X_t - \gamma t, \quad Y_t^* = Y_t - ct$$

추정하고자 하는 회귀분석 모형은

$$Y_t^* = \beta X_t^* + U_t$$

와 같이 설정하였다. 본 절 이후의 절에서는 표기상의 간략화를 위해 X^* 와 Y^* 는 각각 X 와 Y 로 표기하기로 한다.

추정의 안정성을 위해 주식 시장의 변동성이 지나치게 크게 나타나는 2008년과 2009년의 기간을 제외한 2002년부터 2015년까지의 자료를 이용해 밀슈타인(Milstein) 최우추정법을 이용하여 추정한 결과,¹⁵⁾ 모형의 모수는 S&P 500의 경우 $\gamma = 0.0364$, $\delta_1 = 0.104$, $\delta_2 = 0.173$, $\delta_3 = -5.97$ 으로, KOSPI의 경우 $c = 0.0635$, $d_1 = 0.107$, $d_2 = 0.210$, $d_3 = -3.45$ 와 같이 추정되었다. 추정된 모수값으로부터 주어지는 확산과정의 수렴차수는, Jeong and Park(2013)에 따라 다음과 같이 계산된다.

$$\lambda_{X^*}(T) = T^{\frac{1}{2-2\delta_3}} = T^{0.0717}, \quad \lambda_{Y^*}(T) = T^{\frac{1}{2-2d_3}} = T^{0.112}$$

따라서 X^* 와 Y^* 각 시계열의 수렴차수는 모두 브라운 운동의 수렴차수인 $T^{1/2}$ 과는 다른 값을 가져, 단순한 1차 적분과정인 $I(1)$ 모형으로 모형화하는 것은 불충분하다는 것을 확인할 수 있다. 또한 추정된 각 시계열의 수렴차수와 정리 1로부터 일반적인 OLS 추정량은 일치성을 잃게 될 것이라는 것을 확인할 수 있고, 반면 GLS 추정량의 일치성 조건은 정리 2로부터

$$\sqrt{\frac{\Delta}{T}} \frac{\lambda_{U^*}(T)}{\lambda_{X^*}(T)} = \frac{\sqrt{\Delta}}{T^{0.5+0.0717-0.112}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{T^{0.4597}} \rightarrow 0$$

으로 주어져 Δ 의 수렴 속도와 관계 없이 항상 성립함을 알 수 있다.

2. 주가지수 동조화와 비차분 모형의 결정계수

국가간 주가지수의 동조화 분석을 할 때, 일반적으로는 주가지수간 공적

15) 확산과정의 밀슈타인 최우추정법에 대해서는 Jeong and Park(2013)이나 Elerian(1998)을 참조할 수 있다.

분 관계의 유무를 확인하거나 아니면 차분모형에 해당하는 수익률 모형을 가지고 분석을 하게 된다. 하지만 앞서 설명하였듯 차분모형은 원자료의 수준 값에 대한 정보를 잃어버리기 때문에 완전한 대체분석이라 볼 수 없고, 또한 원자료 상에 공적분 관계가 없는 경우라고 하더라도 주가지수 자체로서의 시계열간의 연관성은 분명 존재할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 정보를 잃지 않는 형태인 비차분 자료로 회귀모형을 설정한 뒤, 회귀분석의 기본적인 통계량 중의 하나인 R^2 를 가지고 동조화의 정도를 분석해 보도록 한다. 단순히 R^2 의 수치만을 가지고서 시계열의 동조화 정도를 판단하기는 어렵지만, 본 연구에서는 R^2 의 기본 개념인 '전체 변동량(variation) 중 설명변수로 설명되는 변동량'이라는 의미에 초점을 맞추어 제한적이나마 비교를 시도하였다.

전술하였듯 회귀분석 모형의 R^2 는 피설명변수의 전체 변동량 중 설명변수로 설명되는 변동량의 비중을 나타낸다. 이러한 R^2 는 비차분모형과 차분모형이 서로 의미가 다르며, 수익률 모형에서 높은 R^2 가 나왔다고 해서 이것이 반드시 비차분 모형에서도 높은 R^2 가 나올 것을 의미하지는 않는다. 보다 정확하게 표현하자면, 비차분 모형으로부터 계산된 R^2 는 단순히 차분자료간의 동시기적 연관성뿐만 아니라, 차분 시계열의 자기상관을 함께 고려한다는 점에서 수익률 모형의 R^2 와 다른 의미를 지닌다. 비차분 모형으로부터 계산된 R^2 는 일반적으로 차분자료의 자기상관이 강해짐에 따라 차분 모형으로부터 추정된 R^2 와 더 큰 격차를 보이게 될 것이고, 따라서 차분자료간 자기상관이 강할 경우 차분모형의 R^2 는 추세의 유사성을 충분히 반영하지 못할 것이다. 이러한 이유로 인해, 국가간 주가지수 동조화 분석을 할 때 단순히 수익률간의 연관성만을 보는 것은 불충분할 것이고, 주가지수 수준변수 자체로 구성된 모형의 설명력을 따로 고려하는 것이 필요하다.

본 연구에서 고려하는 회귀모형 (1)은 상수항이 없는 회귀모형으로, 이 경우 R^2 는 일반적으로 다음과 같이 정의된다.¹⁶⁾

16) Buse(1973)에서 지적하였듯 GLS 필터를 통하여 추정하였을 때는, R^2 역시 GLS 필터를 통하여 계산하는 것이 이론적으로는 합당할 수도 있다. 하지만 본 연구에서는 비차분모형 자체의 변동성에 대한 설명력을 비교하기 위해 비차분 변수 X 와

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{i\Delta} - \hat{Y}_{i\Delta})^2}{\sum_{i=1}^n Y_{i\Delta}^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{i\Delta} - \hat{\beta}_{GLS} X_{i\Delta})^2}{\sum_{i=1}^n Y_{i\Delta}^2}$$

이 때 한 가지 유의할 점은 차분모형의 최소자승 추정량을 구하기 위한 1계 조건이 항상 비차분 자료인 $\{X_{i\Delta}\}$ 와 $\{\hat{U}_{i\Delta}\}$ 의 직교성을 충족시키지는 않기 때문에, R^2 를 위와 같이 정의하는 경우 주어진 표본에 대해 TSS = ESS + RSS의 관계식에는 추가적인 오차가 발생할 수 있다.¹⁷⁾ 위와 같이 계산된 비차분모형의 R^2 와 수익률모형의 R^2 를 비교하기 위해 수익률모형을 다음과 같이 정의하고 일반적인 OLS 추정량을 사용해 추정하였다.

$$Y_{i\Delta} - Y_{(i-1)\Delta} = \alpha + \beta(X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}) + u_i$$

이때 u_i 는 회귀식의 오차항을 나타내고, 수익률모형의 OLS 추정량은 $\hat{\alpha}$ 과 $\hat{\beta}$ 로 표기한다.

분석결과를 <표 1>에서 확인해보면 비차분모형의 금융위기 전의 R^2 는 0.85에서 금융위기 이후 0.77로 낮아졌는데, 이는 수익률모형의 R^2 가 금융위기 이전 0.19에서 금융위기 이후 0.29로 높아진 것과 대비되는 모습을 보인다.¹⁸⁾ 이는 수익률의 동조화는 금융위기 이후 그 정도가 높아졌지만, 주가지수의 전반적 추세적인 동조화 정도는 금융위기 이후 오히려 낮아졌을 수도 있음을 의미한다.¹⁹⁾ 이를 <그림 2>의 모습으로 확인해보면, 국소적으로 본 시계열의 패턴은 금융위기 이후가 이전보다 서로 더 유사한 패턴을 보이고 있어, 수익률 모형의 R^2 가 금융위기 이후 더 높아진 것과 부합하는 모습을 보인다. 하지만 전반적인 추세의 관점에서는 금융위기 이후의

Y 에 대해 이와 같이 정의하였다.

- 17) 이 때 TSS는 전체변동(total sum of squares), ESS는 회귀변동(estimated sum of squares), RSS는 잔차변동(residual sum of squares)을 의미한다.
- 18) 금융위기 이전 회귀모형과 이후의 회귀모형은 비교 기준에 해당하는 피설명변수의 총변동량이 달라졌기 때문에 직접적인 비교가 불가능하다고 할 수도 있다. 하지만 앞서 설명하였듯 R^2 를 임의의 자료에 대해 '전체 자료의 변동량'과 '설명변수로 설명될 수 있는 변동량'의 단순 비율로만 해석한다면 타당한 비교가 될 것이다.
- 19) 계수의 크기로부터 측정된 수익률간 반응성 관점에서의 영향력은, 금융위기 이전 0.60에서 금융위기 이후 0.54으로 소폭 하락했다고 해석할 수 있다.

KOSPI는 S&P 500의 성장 추세를 특히 2012년 이후 충분히 따라가지 못하는 모습을 보여, 추세적 유사성은 오히려 금융위기 이전이 이후보다 더 높은 것으로 보인다. 비차분 회귀모형의 R^2 가 시계열의 추세적인 특성을 완벽히 반영한다고 하기는 어렵지만, <표 1>에서 확인할 수 있는 수익률모형과 비차분모형의 상반된 결과는, 보다 풍부한 주가지수 동조화 분석을 위해서는 수익률 모형이나 공적분 모형과는 다른, 추세적 동질성을 측정하기 위한 새로운 접근 방법이 필요함을 시사한다.

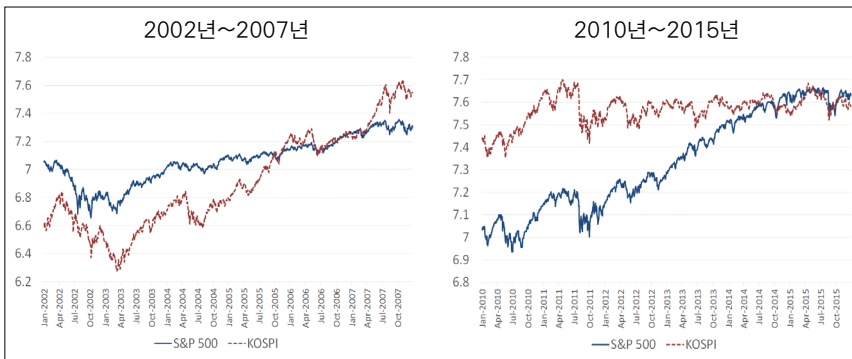
<표 1> 비차분모형과 수익률모형의 기간별 R^2 (R^2 s of level and return models, before and after the financial crisis)

		2002년~2007년	2010년~2015년
비차분모형	$\hat{\beta}_{GLS}$ (t-value)	0.605 (16.4)	0.536 (21.8)
	R^2	0.853	0.769
수익률모형	$\hat{\alpha}$ (t-value)	0.000710 (1.62)	-0.000155 (-0.553)
	$\hat{\beta}$ (t-value)	0.604 (16.3)	0.537 (21.8)
	R^2	0.190	0.293

주: 비차분모형의 경우 GLS 추정량으로 추정한 뒤, 수익률모형의 경우 일반적인 OLS 추정량으로 추정한 뒤 각각 R^2 계산.

Note: The R^2 of the level model is obtained from the GLS estimator, and the R^2 of the return model is obtained from the usual OLS estimator.

<그림 2> 금융위기 전후 로그 S&P 500와 로그 KOSPI(Logs of S&P 500 and KOSPI, before and after the financial crisis)



주: 금융위기 이전은 2002년 1월부터 2007년 12월까지, 금융위기 이후는 2010년 1월부터 2015년 12월까지의 일별자료.

Note: Daily log of stock indices from Jan. 2002 to Dec. 2007, and from Jan. 2010 to Dec. 2015, respectively, before and after the financial crisis.

VI. 결 론

본 연구에서는 연속시간 회귀분석 모형에서 오차항에 비정상성이 있는 경우의 추정량에 대해 분석하였다. 먼저 OLS 추정량의 경우 Choi, Hu and Ogaki(2008)의 1차 누적과정에 대한 결과와 다르게 오차항의 수렴차수에 따라 일치성을 보이는 경우도 있음을 확인할 수 있었다. 먼저 피설명변수의 수렴차수가 설명변수보다 큰 경우, 오차항의 수렴차수는 항상 설명변수의 수렴차수보다 크게 되므로 이 경우 OLS 추정량은 불일치성을 보이게 된다. 하지만 설명변수와 피설명변수의 수렴차수가 동일한 경우에는 오차항의 수렴차수가 설명변수의 수렴차수보다 작을 수도 있고 같을 수도 있기 때문에, OLS의 일치성을 판별하기 위해서는 추가로 오차항의 수렴차수를 알아야 할 것이다. 한편 차분 추정량에 해당하는 GLS 추정량의 경우, Choi, Hu and Ogaki(2008)의 결과와 마찬가지로 일반적인 조건이 충족된다면 항상 일치성을 만족하게 된다. 하지만 이 경우도 역시 기존의 $I(1)$ 과정에 대한 결과와는 다르게, 오차항의 수렴차수가 설명변수의 수렴차수와 큰 격차를 보인다면 일치성을 잃을 수도 있다.

또한 본 연구의 비차분 회귀모형을 주가지수 자료에 적용하여 동조화 분석을 시도해 보았는데, 기존의 수익률에 대한 분석이나 공적분 관계를 통한 동조화 분석들이 놓칠 수 있는 시계열의 특성을 비차분 회귀분석 모형을 통해 밝힐 수도 있다는 것을 보였다. 이러한 분석이 의미를 갖는 것은 차분모형만을 가지고서는 시계열의 추세적인 동질성을 놓칠 수가 있고, 또한 공적분 모형의 관점에서, 단순한 선형 모형에서는 관측되지 않는 공적분 관계를 찾기 위해 복잡한 비선형성이나 구조변화 모형을 도입하는 것이 반드시 바람직하지는 않을 수도 있기 때문이다. 단순한 R^2 의 비교만을 가지고서 추세적인 동질성을 충분히 설명하지는 못하겠지만, 본 연구의 결과는 공적분이 관측되지 않는 경우에도 추세적인 유사성을 측정하기 위한 적절한 척도 개발이 필요함을 시사한다.

◆ 참고문헌 ◆

- 김석진·표영영·도영호 (2011), “한국, 중국 및 미국 주식시장의 동조화”, 『재무관리연구』, 제28권 제2호, 1-23.
- Kim, S., Y. Bao and Y. Do (2011), “The Co-movements among Korean, Chinese, and American Stock Markets”, *The Korean Journal of Financial Management*, 28(2), 1-23 (written in Korean)
- 노상윤 (2010), “주식시장의 수익률 전이로 살펴본 세계경제 동조화에 관한 실증 연구”, 『응용통계연구』, 제23권 제3호, 443-456.
- Rho, S. (2010), “The Empirical Study about the World Economy Synchronization using Returns Transitions between Stock Markets”, *The Korean Journal of Applied Statistics*, 23(3), 443-456. (written in Korean)
- 안유화 (2012), “중국 주식시장과 한국 주식시장과의 동조화 및 글로벌 주식시장과의 비교 평가”, 『국제금융연구』, 제2권 제1호, 73-115.
- An, Y. (2012), “Co-movements between Korean and Chinese Stock Markets and Comparative Analysis of Global Stock Markets”, *Review of International Money and Finance*, 2(1), 73-115. (written in Korean)
- 윤종인 (2007), “국제비교를 통한 한·미 주식시장 동조화의 평가”, 『금융연구』, 제21권 제1호, 55-92.
- Yoon, J. (2007), “The Evaluations and the International Comparisons of the Integration with U.S. Stock Market”, *Finance Research*, 21(1), 55-92. (written in Korean)
- 정진호 (2007), “한국, 중국, 미국 주식시장 간 정보전이 효과에 대한 연구”, 한국재무학회 학술대회, 115-143.
- Jeong, J. (2007), “Transmission of Pricing Information among Korea, China, and US Stock Markets”, Korean Finance Association, 115-143. (written in Korean)
- 최승훈·강상훈 (2014), “한국·중국·일본·미국 주식시장 간 동조화 현상”, 『국제지역연구』, 제18권 제3호, 67-88.
- Choi, S. and S. Kang (2014), “An Analysis of the Co-Movement Effect of Korean, Chinese, Japanese and US Stock Markets: Focus on Global Financial Crisis”, *Journal of International Area Studies*,

- 18(3), 67-88. (written in Korean)
- Baltagi, B. H., C. Kao, and L. Liu (2016), "Estimation and Identification of Change Points in Panel Models with Nonstationary or Stationary Regressors and Error Term", *Econometric Reviews*, 1-18.
- Bingham, N. H., C. M. Goldie, and J. L. Teugels (1993), *Regular Variation*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Buse, A. (1973), "Goodness of Fit in Generalized Least Squares Estimation", *The American Statistician*, 27(3), 106-108.
- Choi, C. Y., L. Hu, and M. Ogaki (2008), "Robust Estimation for Structural Spurious Regressions and a Hausman-type Cointegration Test", *Journal of Econometrics*, 142(1), 327-351.
- Duffie, D., J. Pan, and K. Singleton (2000), "Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-diffusions", *Econometrica*, 68(6), 1343 - 1376.
- Elerian, O. (1998), "A Note on the Existence of a Closed form Conditional Transition Density for the Milstein Scheme", Economics Discussion Paper 1998-W18, Nuffield College, Oxford.
- Jeong, M. and J. Y. Park (2013), "Asymptotic Theory of Maximum Likelihood Estimator for Diffusion Model", Working paper, Indiana University.
- Kim, J. and J. Y. Park (2014), "Mean Reversion and unit Root Properties of Diffusion Models", Working paper, Indiana University.
- Trapani, L. (2012), "On the Asymptotic t-test for Large Nonstationary Panel Models", *Computational Statistics & Data Analysis*, 56(11), 3286-3306.

〈부 록〉

1. 보조정리

보조정리 1 f 와 g 가 두번 미분가능한 함수이고, 이 함수와 이 함수의 도함수들이 모두 정의역의 가장자리에서 p 차 멱함수보다 차수가 같거나 작다고 하자.

(a) 아래의 반복된 적분이 리만 적분(dt)으로만 이루어져 있다고 하자. 그러면 k 를 모든 적분의 개수라고 했을 때 $T \rightarrow \infty$ 이고 $\Delta \rightarrow 0$ 함에 따라 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \cdots \int_{(i-1)\Delta}^s f(r-(i-1)\Delta, X_{(i-1)\Delta}, U_{(i-1)\Delta}, X_r, U_r) dr \cdots dt \times \\ & \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \cdots \int_{(i-1)\Delta}^s g(r-(i-1)\Delta, X_{(i-1)\Delta}, U_{(i-1)\Delta}, X_r, U_r) dr \cdots dt \\ & = O_p(\Delta^{k-1} T^{4pq+1}) \end{aligned}$$

(b) 아래의 반복된 적분이 이토 적분(dW_t 또는 dV_t)을 적어도 하나 이상 포함한다고 하자. 그러면 k_1 을 리만 적분의 개수, k_2 를 이토 적분의 개수라고 하였을 때 $T \rightarrow \infty$ 이고 $\Delta \rightarrow 0$ 함에 따라 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \cdots \int_{(i-1)\Delta}^s f(r-(i-1)\Delta, X_{(i-1)\Delta}, U_{(i-1)\Delta}, X_r, U_r) dr \cdots dW_i \\ & \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \cdots \int_{(i-1)\Delta}^s g(r-(i-1)\Delta, X_{(i-1)\Delta}, U_{(i-1)\Delta}, X_r, U_r) dr \cdots dW_i \\ & = O_p(\Delta^{(2k_1+k_2-1)/2} T^{4pq+1/2}) \end{aligned}$$

이 때 위 적분의 이토 적분과 리만 적분의 순서는 어떤 조합이 되어도 상관 없다.

증명: Jeong and Park(2013)의 Lemma A2의 증명과 유사한 절차를 통해 보일 수 있으므로 자세한 증명은 생략하도록 한다.

보조정리 2 f 가 두번 미분가능한 함수라고 하고 f 와 이 함수의 도함수들이 모두 정의역의 가장자리에서 p 차 멱함수보다 차수가 같거나 작다고 하자. 그러면 $T \rightarrow \infty$ 이고 $\Delta \rightarrow 0$ 함에 따라 다음이 성립한다.

$$\Delta \sum_{i=1}^n f(X_{(i-1)\Delta})g(U_{(i-1)\Delta}) = \int_0^T f(X_t)g(U_t)dt + O_p(\Delta T^{4pq+1})$$

증명: 먼저 이토 보조정리에 따라 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & f(X_t)g(U_t) - f(X_{(i-1)\Delta})g(U_{(i-1)\Delta}) \\ &= \int_{(i-1)\Delta}^t f(X_s)g(U_s)dX_s + \int_{(i-1)\Delta}^t f(X_s)g'(U_s)dU_s \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{(i-1)\Delta}^t f''(X_s)g(U_s)d[X]_s + \frac{1}{2} \int_{(i-1)\Delta}^t f(X_s)g''(U_s)d[U]_s \\ &= \int_{(i-1)\Delta}^t [f(X_s)g(U_s)\mu(X_s) + \frac{1}{2}f''(X_s)g(U_s)\sigma^2(X_s) \\ & \quad + \frac{1}{2}f(X_s)g''(U_s)\omega^2(U_s)]ds \\ & \quad + \int_{(i-1)\Delta}^t [f(X_s)g(U_s)\sigma(X_s)dW_s + f(X_s)g'(U_s)\omega(U_s)dV_s] \\ &= \int_{(i-1)\Delta}^t \mathcal{A}_{f,g}(X_s, U_s)ds + \int_{(i-1)\Delta}^t \mathcal{B}_{1f,g}(X_s, U_s)dW_s \\ & \quad + \int_{(i-1)\Delta}^t \mathcal{B}_{2f,g}(X_s, U_s)dV_s \tag{1} \end{aligned}$$

이때 $\mathcal{A}_{f,g}(x, u) = f'(x)g(u)\mu(x) + f''(x)g(u)\sigma^2(x)/2 + f(x)g''(u)\omega^2(u)/2$ 와 같이, $\mathcal{B}_{1f,g}(x, u) = f'(x)g(u)\sigma(x)$, $\mathcal{B}_{2f,g}(x, u) = f'(x)g'(u)\omega(u)$ 와 같이 정의한다. 따라서 (1)과 보조정리 1를 통해 다음을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T f(X_t)g(U_t)dt - \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} [f(X_t)g(U_t) - f(X_{(i-1)\Delta})g(U_{(i-1)\Delta})]dt \\
 &= \int_0^T f(X_t)g(U_t)dt - \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int_{(i-1)\Delta}^t \mathcal{A}_{f,g}(X_s, U_s) ds dt \\
 & \quad - \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int_{(i-1)\Delta}^t \mathcal{B}_{1f,g}(X_s, U_s) dW_s dt \\
 & \quad - \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int_{(i-1)\Delta}^t \mathcal{B}_{2f,g}(X_s, U_s) dV_s dt \\
 &= \int_0^T f(X_t)g(U_t)dt + O_p(\Delta T^{4pq+1})
 \end{aligned}$$

보조정리 3 $t \in [0, T]$ 에 대해

$$Z_t^\Delta - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i=1}^{\lfloor t/\Delta \rfloor} (W_{i\Delta} - W_{(i-1)\Delta})(V_{i\Delta} - V_{(i-1)\Delta})$$

라 하였을 때 $T \rightarrow \infty$ 이고 $\Delta \rightarrow 0$ 함에 따라 $Z^\Delta \rightarrow_d Z$ 가 성립한다. 이때 Z 는 W, V 와 독립인 표준 브라운 운동이다.

증명: Jeong and Park(2013)의 Lemma A3의 증명에서

$$\sqrt{\frac{2}{\Delta}} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int_{(i-1)\Delta}^s dW_u dW_s$$

를 $(W_{i\Delta} - W_{(i-1)\Delta})(V_{i\Delta} - V_{(i-1)\Delta})/\sqrt{\Delta}$ 로 바꾸어 대입하면 동일하게 증명할 수 있으므로 자세한 증명은 생략하도록 한다.

보조정리 4 f 와 g 가 두번 미분가능한 함수라고 하고 f, g 와 이 함수들의 도함수들이 모두 정의역의 가장자리에서 p 차 멱함수보다 차수가 같거나 작다고 하자. 그러면 $T \rightarrow \infty$ 이고 $\Delta \rightarrow 0$ 함에 따라 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i=1}^n f(X_{(i-1)\Delta})g(U_{(i-1)\Delta})(W_{i\Delta} - W_{(i-1)\Delta})(U_{i\Delta} - U_{(i-1)\Delta}) \\ &= \int_0^T f(X_t)g(U_t)dZ_t + O_p(\Delta^{1/4} T^{8pq+7/4}) \end{aligned}$$

증명: 보조정리 3를 이용하면 Jeong and Park(2013)의 Lemma A4(a)와 유사한 방법으로 증명할 수 있으므로 자세한 증명은 생략하도록 한다.

보조정리 5 두 함수 f 와 g 가 국소적 유계이며 정칙변동성을 지닌다고 하자. 또한 두 함수는 모든 $x \neq 0$ 에 대해 $T \rightarrow \infty$ 일 때 $f(Tx)/\lambda_f(T) \sim \bar{f}(x)$ 와 $g(Tx)/\lambda_g(T) \sim \bar{g}(x)$ 를 만족한다. 그러면 $T \rightarrow \infty$ 함에 따라 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T(\lambda_f \circ \lambda_X)(T)(\lambda_g \circ \lambda_U)(T)} \int_0^T f(X_t)g(U_t)dt \rightarrow_d \int_0^1 \bar{f}(X_t^\circ) \bar{g}(U_t^\circ)dt, \\ & \frac{1}{\sqrt{T}(\lambda_f \circ \lambda_X)(T)(\lambda_g \circ \lambda_U)(T)} \int_0^T f(X_t)g(U_t)dZ_t \rightarrow_d \int_0^1 \bar{f}(X_t^\circ) \bar{g}(U_t^\circ)dZ_t^\circ. \end{aligned}$$

이 때 Z° 은 X° , U° 과 독립인 표준 브라운 운동이다.

증명: Jeong and Park(2013)의 Theorem 3.5(b)의 증명과 유사한 방법으로 보일 수 있으므로 자세한 증명은 생략하도록 한다.

2. 정리에 대한 증명

(1) 정리 1의 증명

$Y_{i\Delta} = \beta_0 X_{i\Delta} + U_{i\Delta}$ 로부터 다음이 성립한다.

$$\hat{\beta}_{OLS} = \beta_0 + \frac{\sum_{i=1}^n X_{i\Delta} U_{i\Delta}}{\sum_{i=1}^n X_{i\Delta}^2} \tag{2}$$

이 때 (2) 둘째항의 분자는 보조정리 2와 5에 따라 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta}{T\lambda_X(T)\lambda_U(T)} \sum_{i=1}^n X_{i\Delta} U_{i\Delta} \\ &= \frac{1}{T\lambda_X(T)\lambda_U(T)} \left(\int_0^T X_t U_t dt + O_p(\Delta T^{4pq+1}) \right) \rightarrow_d \int_0^1 X_t^\circ U_t^\circ dt \end{aligned} \quad (3)$$

또한 분모도 마찬가지로 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$\frac{\Delta}{T\lambda_X^2(T)} \sum_{i=1}^n X_{i\Delta}^2 = \frac{1}{T\lambda_X^2(T)} \left(\int_0^T X_t^2 dt + O_p(\Delta T^{4pq+1}) \right) \rightarrow_d \int_0^1 X_t^{\circ 2} dt \quad (4)$$

따라서 (2)와 (3), (4)로부터 정리의 명제가 성립한다.

(2) 정리 2의 증명

$(Y_{i\Delta} - Y_{(i-1)\Delta}) = \beta_0 (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}) + (U_{i\Delta} - U_{(i-1)\Delta})$ 로부터 다음이 성립한다.

$$\hat{\beta}_{GLS} = \beta_0 + \frac{\sum_{i=1}^n (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta})(U_{i\Delta} - U_{(i-1)\Delta})}{\sum_{i=1}^n (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta})^2} \quad (5)$$

먼저 (5) 둘째항의 분자에 해당하는 항은 X 와 U 의 SDE (2)에 의해 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta})(U_{i\Delta} - U_{(i-1)\Delta}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \mu(X_t) dt + \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \sigma(X_t) dW_t \right) \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \omega(U_t) dV_t \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \mu(X_t) dt \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \omega(U_t) dV_t \\ & \quad + \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \sigma(X_t) dW_t \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \omega(U_t) dV_t \end{aligned} \quad (6)$$

이 때 (6)의 첫항은 보조정리 1에 의해 다음이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \mu(X_t) dt \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \omega(U_t) dV_t = O_p(\Delta T^{4pq+1/2}) \quad (7)$$

(6)의 둘째항은 이토 보조정리에 의해 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \sigma(X_t) dW_t \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \omega(U_t) dV_t \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma(X_{(i-1)\Delta}) (W_{i\Delta} - W_{(i-1)\Delta}) \omega(U_{(i-1)\Delta}) (V_{i\Delta} - V_{(i-1)\Delta}) \\ & \quad - \sum_{i=1}^n \sigma(X_{(i-1)\Delta}) (W_{i\Delta} - W_{(i-1)\Delta}) \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int_{(i-1)\Delta}^t \frac{\omega^2(U_s) \omega'(U_s)}{2} ds dV_t \\ & \quad - \sum_{i=1}^n \sigma(X_{(i-1)\Delta}) (W_{i\Delta} - W_{(i-1)\Delta}) \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int_{(i-1)\Delta}^t \omega(U_s) \omega'(U_s) dV_s dV_t \\ & \quad - \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int_{(i-1)\Delta}^t (\mu(X_s) \sigma'(X_s) \\ & \quad \quad + \frac{1}{2} \sigma^2(X_s) \sigma''(X_s)) ds dW_t \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \omega(U_t) dV_t \\ & \quad - \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int_{(i-1)\Delta}^t \sigma(x_s) \sigma'(X_s) dW_s dW_t \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \omega(U_t) dV_t \\ &= A_{0T} + A_{1T} + A_{2T} + A_{3T} + A_{4T} \end{aligned} \quad (8)$$

위 식 각 항의 차수는 보조정리 1에 의해 $A_{1T} = O_p(\Delta^{3/2} T^{8pq+1/2})$, $A_{2T} = O_p(\Delta T^{8pq+1/2})$, $A_{3T} = O_p(\Delta^{3/2} T^{8pq+1/2})$, $A_{4T} = O_p(\Delta T^{8pq+1/2})$ 와 같이 구해진다. 또한 선도항인 A_{0T} 는 보조정리 4에 의해 다음이 성립한다.

$$A_{0T} = \sqrt{\Delta} \int_0^T \sigma(X_t) \omega(U_t) dZ_t + O_p(\Delta^{3/4} T^{8pq+7/4}) \quad (9)$$

따라서 (6), (7), (8), (9), 보조정리 5에 의해 다음을 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\Delta T} (\lambda_\sigma \circ \lambda_X)(T) (\lambda_\omega \circ \lambda_U)(T)} \sum_{i=1}^n (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}) (U_{i\Delta} - U_{(i-1)\Delta}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T} (\lambda_\sigma \circ \lambda_X)(T) (\lambda_\omega \circ \lambda_U)(T)} \left(\int_0^T \sigma(X_t) \omega(U_t) dZ_t + O_p(\Delta^{1/4} T^{8pq+7/4}) \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow_d \int_0^1 \bar{\sigma}(X_t^\circ) \bar{\omega}(U_t^\circ) dZ_t^\circ \tag{10}$$

또한 (5) 둘째항의 분모도 비슷한 방식으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T(\lambda_\sigma \circ \lambda_X)^2(T)} \sum_{i=1}^n (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta})^2 \\ &= \frac{1}{T(\lambda_\sigma \circ \lambda_X)^2(T)} \left(\int_0^T \sigma^2(X_t) dt + O_p(\Delta T^{8pq/pq+1}) \right) \rightarrow_d \int_0^1 \bar{\sigma}^2(X^\circ) dt \tag{11} \end{aligned}$$

따라서 (5), (10), (11)에 따라 정리의 명제가 성립한다.

Continuous-time Regression with Nonstationary Error and the Comovement of Stock Indices

Minsoo Jeong*

Abstract

We study the asymptotic properties of the continuous-time regression in the presence of nonstationary error. Choi, Hu and Ogaki (2008) have already well studied the case of $I(1)$ processes in discrete time. However, contrary to $I(1)$ processes, there arise a variety of situations when the model is in continuous time. In continuous-time regression, we verify that both the OLS (ordinary least squares) and GLS (generalized least squares) estimators may or may not achieve the consistency, depending on the property of the processes. We establish detailed conditions for the consistency of the estimators in each case. Furthermore, we apply our regression model to the stock indices of Korea and the US, to show that the cointegration or return analysis may not fully characterize the comovement of the stock indices.

KRF Classification : B030104

**Key Words : diffusion process, continuous-time model,
nonstationary error, regression, consistency**

* Assistant Professor, Department of Economics, Yonsei University Wonju Campus, e-mail: mssjong@yonsei.ac.kr