한국경제학보 제11권 제2호
The Korean Journal of Economics Vol. 11, No. 2 (Autumn 2004)

정보발생확률함수 Ⅱ :
표본에서 모집단으로

김 학 은*

요 약

이 논문의 목표는 세 가지이다. 첫째, 하나의 시계열 확률변수의 평균을 두 도구변수의 가중평균으로 표현하고 이 가중평균에 오차를 포함하여 확률변수를 설명한다. 이러한 수학적 표현이 가능한 공간을 소문자공간이라 이름하면 이와 동일한 현상의 그림자가 대문자공간에서 나타난다는 것을 밝힌다. 두 공간 사이의 유기적인 관계에서 소문자공간의 오차방정식과 대문자공간의 오차방정식을 생산할 수 있음을 보인다. 둘째, 소문자공간의 회귀방정식, 대문자공간의 회귀방정식, 소문자공간의 오차방정식, 대문자공간의 오차방정식은 4개의 방정식 체계를 형성한다. 이 방정식 체계에서 2개의 도구변수와 2개의 가중치와 2개의 오차가 미지수이다. 셋째, 2개의 가중치를 구하기 위하여 새로운 정보로서 원래의 시계열 확률변수의 산술평균, 조화평균, 가중평균을 사용하여 두 공간 사이의 유기적인 관계를 이용한다. 그 결과 2개의 오차와 2개의 도구변수의 시계열 표본이 구해질 수 있음을 보인다. 넷째, 이 모든 결과를 이용하여 정보발생함수를 구할 수 있는데 여기서도 두 공간 사이의 역학관계가 중요한 역할을 한다.

핵심 주제어 : 소문자공간, 대문자공간

I. 머 리 말

하나의 시계열 확률변수는 한 시점에서 실현되어 하나의 표본이 되고 나머지 모집단은 시간 속에 사라진다. 그러나 사라지지 않고 다만 숨겨져 있다는 것이 정보발생확률함수 I에서 증명되었다(김학은, 2001). 숨겨져 있는 모집단을 찾아내는 방법에 대하여 두 요인 선형함수를 이용하였다.

* 연세대학교 상경대학 경제학과 교수, 서울 서대문구 신촌동 134번지, 우편번호 120-749, hakun@base.yonsei.ac.kr

두 요인 선형함수 가운데 잘 알려진 자본자산가격모형을 사용하였지만 이것은 특별한 함수이므로 일반적으로 확장할 필요가 있다. 본 논문의 목적은 일반화에 있는데 구체적으로 세 가지 목표를 달성하는 것이다. 첫째, 하나의 확률변수의 평균을 두 요인의 선형함수로 표현한다. 둘째, 하나의 확률변수의 표본에 대하여 두 요인의 크기를 찾아내고 각 요인의 가중치를 찾아낸다. 셋째, 오차를 발생시킨다. 오차의 발생은 확률변수의 모집단을 발생시키는 것과 동일하다. 분석의 핵심은 두 공간인 소문자공간과 대문자공간 사이의 변수전환의 역관계이다.

Ⅱ. 기본 방정식

하나의 확률변수를 두 요인 선형함수로 표현하는 예로서 소비함수 $C = C_0 + aY + \varepsilon$을 들 수 있다. 이 때 한계소비성향의 범위가 $1 > a > 0$이므로 소득이 없는 경우의 최저소비를 $C_0 = (1-a)X$로 정의할 수 있다. 그러면 소비함수는 $C = (1-a)X + aY + \varepsilon$으로 표현할 수 있다. 소비 C와 소득 Y의 시계열 자료가 주어지면 회귀분석에 의하여 소비성향 a와 최저소비 C_0를 추정할 수 있으므로 소비함수의 추정 방정식은 $C = (1-\hat{a})X + \hat{a}Y + \hat{\varepsilon}$이며 이를 기초하여 한 시점에서 소비의 모집단을 구할 수 있다. 그 방정식이 정보발생확률 방정식인데 한 시점 t에서 실현된 소비가 n번째 표본이라면 이 표본에서 실현되지 않은 소비 C_{tn+1}을 발생시키는 공식은 $C_{tn+1} = C_{tn}/(1+\theta_{tn}\varepsilon_{tn})$이며 이 공식은 모든 n에 대하여 성립하므로 이론적으로 실현되지 않은 무한대의 모집단을 찾아낼 수 있다(김학은, 2001). 이 방법에서 핵심은 세 가지이다. 첫째, 한 시점에서 확률변수의 하나의 표본이 필요하다. 그 표본은 오차를 제외하고 두 요인의 가중치로 표현할 수 있어야 한다. 둘째, 한 시점에서 각 요인의 표본이 알려져야 한다. 셋째, 각 요인의 가중치가 알려져야 한다. 그러나 현실에서 모든 확률변수가 소비처럼 잘 정의된 두 요인에 의해서 설명되는 것은 아니다. 임의의 확률변수 y_t를 다음과 같이 두 요인 z_t와 f_t에 의해 설명한다.

소문자공간의 회귀방정식 $y_t = \beta z_t + (1-\beta)f_t + \varepsilon_t$ (1)

우리의 목적은 첫째, 확률변수의 평균 $Ey_t = \beta z_t + (1-\beta)f_t$의 정체를 규명하고, 둘째, $y_{tn+1} = y_{tn}/(1+\nu_{tn}\varepsilon_{tn})$을 유도하며, 셋째, 할인율 ν_{tn}과 오차 ε_{tn}을 구하는 것이다. 여기서 두 요인 z_t와 f_t는 소비함수의 경우와 달리 잘 정의되어 있지 않으므로 도구변수(instrumental variables)에 불과하며 확률변수 y_t를 설명하는데 경제학적 의미가 있을 수도 있고 없을 수도 있다. 요인(factor)으로 설명하는 대표적인 모형이 다요인모형 또는 재정가격결정모형이다. 식 (1)이 성립하면 이 논문에서 제시하는 동일한 방법을 두 요인에 적용하여 식 (1)을 다요인으로 확장할 수 있다. 그러면 재정가격결정모형에서 다요인의 정체를 밝히는데 도움이 될 것이다.

회귀방정식 (1)이 정의되는 공간을 소문자공간이라고 부르자. 이 이름은 식 (1)의 변수에서 소문자를 사용하기 때문에 붙인 이름이며 그 이상의 의미는 없다. 여기서 오차 ε_t의 평균은 0이고 분산은 유한하다고 가정한다. 오차의 특성을 살려서 식 (1)을 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$y_A = \beta z_A + (1-\beta)f_A \tag{2}$$

여기서 무릎문자 A는 산술평균을 나타낸다. 소비함수의 예와 달리 우리는 식 (1)에서 두 요인 z_t와 f_t, 그 가중치 β를 모두 모르는 상태이다. 이 논문에서 우리는 이러한 제약을 우회하여 임의의 확률변수를 설명하는 두 요인과 가중치를 찾아내는 방법을 제시한다. 그 후 이 결과를 이용하여 확률변수의 모집단을 모두 발생시킨다. 힐드레드-훅크(Hildreth-Houck (1968)의 확률 모수(random parameter) 회귀직선을 이용하기 위하여 오차를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\varepsilon_t = (\beta_t - \beta)(z_t - f_t) \tag{3}$$

식 (3)을 식 (1)에 대입하면 다음과 같은 확률 모수 회귀직선이 성립한다.

확률 모수 회귀직선 $y_t = \beta_t z_t + (1-\beta_t)f_t$ (4)

비확률 계수 β가 오차를 포함하여 확률변수 β_t로 변하였다. 확률변수 y_t는 두 요인에 의해 확률 모수 β_t의 가중평균으로 표현되었으므로 다음을 정의할 수 있다.

$$\beta_t z_t = \alpha_t y_t, \quad (1-\beta_t)f_t = (1-\alpha_t)y_t \tag{5}$$

식 (5)는 중심의 좌표가 $(\alpha_t y_t, (1-\alpha_t)y_t)$인 다음의 쌍곡선을 의미한다.

$$\frac{1}{y_t} = \frac{\alpha_t}{z_t} + \frac{1-\alpha_t}{f_t} \tag{6}$$

이것은 변수전환을 이용하면 다음의 직선과 동일하다.

$$Y_t = \alpha_t Z_t + (1-\alpha_t)F_t \tag{7}$$

여기서 $y_t Y_t = 1$, $z_t Z_t = 1$, $f_t F_t = 1$이다. 식 (7) 역시 Hildreth-Houck의 확률 모수 회귀직선이므로 새로운 오차 $u_t = (\alpha_t - \alpha)(Z_t - F_t)$를 정의하면 식 (7)은 다음과 같다.

대문자공간의 회귀방정식 $Y_t = \alpha Z_t + (1-\alpha)F_t + u_t$ (8)

회귀방정식 (8)이 정의되는 공간을 대문자공간이라고 부르자. 역시 대문자로 표기했기 때문에 붙인 이름이다. 오차는 0의 평균과 유한의 분산을 갖는다. 따라서 산술평균으로 표현하면 식 (8)은 다음과 같다.

$$Y_A = \alpha Z_A + (1-\alpha)F_A \tag{9}$$

식 (1)이 소문자공간에서 회귀방정식이라면 식 (8)은 대문자공간에서 회귀방정식이다. 두 식은 서로 다른 가중치를 가지므로 독립이다. 식 (8)에 식 (1)을 곱하여 정리하면 다음과 같이 두 오차 사이의 관계를 얻는다.

$$u_t = \frac{(f_t - z_t)(\beta z_t - \alpha y_t)}{y_t z_t f_t} - \frac{z_t}{y_t z_t f_t}\varepsilon_t = A - B\varepsilon_t \tag{10}$$

여기서 A와 B는 각각 다음과 같다.

$$A = \frac{(f_t - z_t)(\beta z_t - \alpha y_t)}{y_t z_t f_t} \tag{11}$$

$$B = \frac{z_t}{y_t z_t f_t} \tag{12}$$

우리에게 확률변수 y_t가 주어진 상태에서 두 요인 z_t와 f_t, 두 가중치 α와 β만 알면 두 오차 ε_t와 u_t 사이의 관계를 정의할 수 있다.

이번에는 식 (1)을 식 (4)와 다르게 다음과 같은 관측평행직선으로 표현할 수 있다.

관측평행직선 $$y_t = \beta z_t^* + (1-\beta)f_t^* \tag{13}$$

여기서 $z_t^* = z_t + \varepsilon_t$이고 $f_t^* = f_t + \varepsilon_t$이다. 관측평행직선 (13)과 확률모수 회귀직선 (4)는 동일한 회귀방정식 (1)에 같은 뿌리를 두고 있지만 다른 방정식이다. 식 (13)은 확률변수를 두 요인의 가중치로 표현하므로 앞서 적용한 방법으로 다음을 정의할 수 있다.

$$\beta z_t^* = \alpha_t' y_t \qquad (1-\beta)f_t^* = (1-\alpha_t')y_t \tag{14}$$

정의 (14)는 다음을 의미한다.

$$\frac{1}{y_t} = \frac{\alpha_t'}{z_t^*} + \frac{1-\alpha_t'}{f_t^*} \tag{15}$$

소문자와 대문자 사이의 역관계 $y_t Y_t = 1$, $z_t Z_t = 1$, $f_t F_t = 1$을 이용하면 식 (15)는 다음과 동일하다.

$$Y_t = \alpha_t' Z_t' + (1-\alpha_t')F_t' \tag{16}$$

여기서

$$Z_t' = Z_t/\{1+\varepsilon_t[\beta Z_t+(1-\beta)F_t]\} \quad (17)$$

$$F_t' = F_t/\{1+\varepsilon_t[\beta Z_t+(1-\beta)F_t]\} \quad (18)$$

마찬가지 방법으로 대문자 회귀방정식 (8)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Y_t = \alpha Z_t^* + (1-\alpha)F_t^* \quad (19)$$

여기서 $Z_t^* = Z_t + u_t$이고 $F_t^* = F_t + u_t$이다. 식 (19)는 식 (7)과 다른 방정식이다. 식 (19)는 확률변수를 두 요인의 가중치로 표현하므로 앞서 적용한 방법으로 다음을 정의할 수 있다.

$$\alpha Z_t^* = \beta_t' Y_t \qquad (1-\alpha)F_t^* = (1-\beta_t')Y_t \quad (20)$$

정의 (20)은 다음을 의미한다.

$$\frac{1}{Y_t} = \frac{\beta_t'}{Z_t^*} + \frac{1-\beta_t'}{F_t^*} \quad (21)$$

소문자와 대문자 사이의 역관계 $y_t Y_t = 1$, $z_t Z_t = 1$, $f_t F_t = 1$을 이용하면 식 (21)은 다음과 동일하다.

$$y_t = \beta_t' z_t' + (1-\beta_t')f_t' \quad (22)$$

여기서

$$z_t' = z_t/\{1+u_t[\alpha z_t+(1-\alpha)f_t]\} \quad (23)$$

$$f_t' = f_t/\{1+u_t[\alpha z_t+(1-\alpha)f_t]\} \quad (24)$$

식 (16)과 식 (22)에서 다음이 성립한다.

$$\{1+u_t[\alpha_t z_t+(1-\alpha_t)f_t]\}\{1+\varepsilon_t[\beta_t Z_t+(1-\beta_t)F_t]\} = 1 \quad (25)$$

이것을 정리하면 다음과 같다.

$$\varepsilon_t = -\frac{[\alpha F_t + (1-\alpha)Z_t]u_t}{[\beta Z_t + (1-\beta)F_t]\{Z_t F_t + (\alpha F_t + (1-\alpha)Z_t)u_t\}} \quad (26)$$

또는

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{[\beta f_t + (1-\beta_t)z_t]\varepsilon_t}{[\alpha z_t + (1-\alpha)f_t]\{z_t f_t + [\beta f_t + (1-\beta)z_t]\varepsilon_t\}} \\ &= -\frac{G\varepsilon_t}{C(D+G\varepsilon_t)} \end{aligned} \quad (27)$$

여기서

$$C = \alpha z_t + (1-\alpha)f_t \quad (28)$$

$$D = z_t f_t \quad (29)$$

$$G = \beta f_t + (1-\beta)z_t \quad (30)$$

식 (27)은 두 오차 사이의 또 하나의 관계이다. 오차 식 (27)은 오차 식 (10)과 독립이다. 식 (26)에서 $u_t > 0$이면 $\varepsilon_t < 0$이고, 식 (27)에서 $\varepsilon_t > 0$이면 $u_t < 0$이므로 다음의 정리가 성립한다.

정리 1 $\varepsilon_t u_t < 0$

소문자공간에서 오차가 양수이면 변수전환을 하여 대문자공간에서는 음수가 되어야 하고 그 반대도 성립한다. 소문자공간에서 대문자공간으로 변수전환을 이용할 때 소문자변수와 대문자변수는 역관계이므로 부호는 동일하였다. 그러나 그로 인해 발생하는 오차는 부호가 반대이다. 이것은 대문자공간의 회귀방정식이 소문자공간의 회귀방정식에서 파생되지만 각각 독립일 수 있다는 점을 시사한다.

Ⅲ. 오차 사이의 관계

오차에 관한 2개의 기본 방정식 (10)과 (27)은 다른 조건을 알면 2개의 오차 사이의 관계를 정의하고 있다. 이제 다음을 정의한다.

$$\sigma_t = -\frac{\varepsilon_t}{u_t} > 0 \tag{31}$$

〈정리 1〉에 의하여 $\gamma_t > 0$이다. 정의 (31)을 식 (27)과 식 (10)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\varepsilon_t^3 - (a_t - \sigma_t/y_t)\,\varepsilon_t^2 + (c_t - j_t\sigma_t)\,\varepsilon_t + g_t\sigma_t = 0 \tag{32}$$

$$\varepsilon_t^2 - (a_t + g_t - \sigma_t/y_t)\varepsilon_t + (h_t - j_t\sigma_t) = 0 \tag{33}$$

여기서

$$a_t = z_t^* + f_t^* > 0 \tag{34}$$

$$c_t = z_t^* f_t^* > 0 \tag{35}$$

$$j_t = [\beta f_t{}^* + (1-\beta)z_t^*]/y_t > 0 \tag{36}$$

$$h_t = [\alpha z_t^* + (1-\alpha)f_t^*]z_t^* f_t^*/y_t > 0 \tag{37}$$

$$g_t = [\beta z_t^* - \alpha y_t][f_t^* - z_t^*]/y_t > 0 \tag{38}$$

$$a_t + g_t > 0 \tag{39}$$

식 (32)와 식 (33)에서 다음이 성립한다.

$$\varepsilon_t^2 + \pi_t\varepsilon_t + \sigma_t = 0 \tag{40}$$

여기서

$$\pi_t = \frac{c_t - h_t}{g_t} = -\frac{(\beta-\alpha)z_t^* f_t^*}{\beta z_t^* - \alpha y_t} \tag{41}$$

동일한 방법을 대문자 회귀방정식에 적용하면 다음을 얻는다.

$$u_t^2 + \phi_t u_t + \lambda_t = 0 \tag{42}$$

여기서

$$\lambda_t = 1/\sigma_t > 0 \tag{43}$$

식 (40)과 식 (42)에서 오차가 허수가 되지 않을 조건은 다음과 같다.

$$\theta_t \phi_t + 4 \le 0 \tag{44}$$

정의 (31)을 식 (40)과 식 (42)에 대입하여 정리하면

$$\varepsilon_t(u_t + \phi_t) = 1 \tag{45}$$

$$u_t(\varepsilon_t + \pi_t) = 1 \tag{46}$$

따라서

$$\varepsilon_t u_t(\varepsilon_t + \pi_t)(u_t + \phi_t) = 1 \tag{47}$$

그런데 $u_t = \phi_t/2$와 $\varepsilon_t = \pi_t/2$에서 다음이 성립한다.

$$(u_t + \phi_t)(\varepsilon_t + \pi_t) \,\Big|\, _{\substack{2u_t = -\phi_t \\ 2\varepsilon_t = -\pi_t}} = \frac{\phi_t \pi_t}{4} \le -1 \tag{48}$$

이것은 〈정리 1〉과 함께 다음을 의미한다.

정리 2 $0 > \varepsilon_t u_t \ge -1$

〈정리 2〉의 의미는 다음과 같다. 소문자 회귀방정식 (1)을 대문자 회귀방정식 (8)로 전환할 때 종속변수와 설명변수 모두 역관계 $y_t Y_t = 1$, $z_t Z_t = 1$, $f_t F_t = 1$이지만 오차 사이는 반드시 역관계가 아니라 $0 > \varepsilon_t u_t \ge -1$의 관계가 된다. 이 같은 〈정리 2〉의 사실은 소문자공간

의 식 (1)과 이 식을 변수전환하여 대문자공간에서 구한 식 (8)이 서로 독립방정식이라는 점을 가리키고 있다. 이처럼 소문자공간과 대문자공간은 독립적인 관계이다. 한 걸음 더 나아가서 식 (1)에서 식 (8)을 유도하는 중간과정에서 등장한 식 (4)와 식 (13)도 모두 식 (1)에 동일한 뿌리를 두고 있지만 서로 독립방정식이다.

Ⅳ. 오차방정식과 최소 오차

식 (10)을 u_t에 대하여 식 (27)에 대입하면 다음과 같이 소문자공간의 오차방정식을 구할 수 있다.

$$(BCG)\varepsilon_t^2 + (BCD - ACG - G)\varepsilon_t - (ACD) = 0 \qquad (49)$$

식 (49)는 다른 조건이 일정할 때 y_t와 ε_t 사이의 2차 방정식이므로 y_t와 ε_t 사이의 1차 방정식인 식 (1)과 독립이다. 2차 방정식이므로 풀이가 2개인 경우 최소 오차를 선택하면 저절로 오차의 최소자승을 얻게 된다.

이번에는 식 (10)을 ε_t에 대하여 식 (27)에 대입하면 다음과 같이 대문자공간의 오차방정식을 구할 수 있다.

$$(CG)u_t^2 + (G - ACG - BCD)u_t - (AG) = 0 \qquad (50)$$

식 (50)은 다른 조건이 일정할 때 y_t와 u_t 사이의 2차 방정식이므로 y_t와 ε_t 사이의 1차 방정식인 식 (1)과 독립이며 Y_t와 u_t 사이의 1차 방정식인 식 (8)과도 독립이다.

Ⅴ. 방정식 체계

지금까지 논의에서 파생된 방정식을 다음과 같이 〈도표 1〉로 요약할 수

도표 1 방정식의 파생 체계

$$
\begin{array}{ccc}
 & y_t = \beta z_t + (1-\beta) f_t + \varepsilon_t & \\
\swarrow & & \searrow \\
y_t = \beta_t z_t + (1-\beta_t) f_t & & y_t = \beta z_t^* + (1-\beta) f_t^* \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y_t = \alpha_t Z_t + (1-\alpha_t) F_t & & Y_t = \alpha_t' Z_t' + (1-\alpha_t') F_t' \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y_t = \alpha Z_t + (1-\alpha) F_t + u_t & & y_t = \beta_t' z_t' + (1-\beta_t') f_t' \\
\downarrow & & \downarrow \\
u_t = A - B\varepsilon_t & & u_t = -\dfrac{G\varepsilon_t}{C(D+G\varepsilon_t)} \\
\searrow & & \swarrow \\
 & \varepsilon_t^2 + \pi_t \varepsilon_t + \sigma_t = 0 & \\
 & u_t^2 + \phi_t u_t + \lambda_t = 0 &
\end{array}
$$

있다. 모든 함수는 식 (1)에서 유래되지만 독립방정식이다. 숨겨진 대문자공간의 존재 때문이다.

이 체계는 다음과 같이 4개의 독립방정식으로 구성된다. 최초의 소문자공간의 회귀방정식 (1), 대문자공간의 회귀방정식 (8), 소문자공간의 오차방정식 (49), 대문자공간의 오차방정식 (50)이다. 연립방정식 체계 1은 다음과 같다.

〈연립방정식 체계 1〉

$$y_t = \beta z_t + (1-\beta) f_t + \varepsilon_t \qquad (1)$$

$$(BCG)\varepsilon_t^2 + (BCD - ACG - G)\varepsilon_t - (ACD) = 0 \qquad (49)$$

$$Y_t = \alpha Z_t + (1-\alpha) F_t + u_t \qquad (8)$$

$$(CG)u_t^2 + (G - ACG - BCD)u_t - (AG) = 0 \qquad (50)$$

4개의 독립방정식은 모두 하나의 식 (1)에 뿌리를 두고 있는데 이것이 가능한 것은 다른 공간을 이용하였기 때문이다. 4개의 독립방정식 체계에

서 주어진 것은 y_t뿐인데 가중치 β와 α가 추가적으로 주어지면 4개의 미지수 $(z_t, f_t, \varepsilon_t, u_t)$가 모두 풀어진다. 그러기 위하여 가중치 β와 α를 구해야 한다.

Ⅵ. 가중치의 결정 1

가중치 β와 α를 구하기 위해서 추가적인 정보가 필요한데 그것은 주어진 y_t의 시계열 자료에서 산술평균 y_A, 조화평균 y_H, 기하평균 y_G를 이용하는 것이다. 정의에 의해서 다음이 성립한다.

$$y_A = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{Y_t} = \frac{1}{Y_H} \tag{51}$$

$$y_H = \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{y_t}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t\right)^{-1} = \frac{1}{Y_A} \tag{52}$$

$$y_G = (y_1 y_2 \cdots y_T)^{\frac{1}{T}} = \left(\frac{1}{Y_1}\frac{1}{Y_2}\cdots\frac{1}{Y_T}\right)^{\frac{1}{T}} = \frac{1}{Y_G} \tag{53}$$

소문자공간에서 산술평균은 대문자공간에서 조화평균이지만 소문자공간에서 기하평균은 대문자공간에서도 기하평균이다. 따라서 $y_A Y_H = 1$, $y_H Y_A = 1$, $y_G Y_G = 1$이다.

1. 소문자공간

소문자공간의 회귀방정식 (1)에서 확률변수 y_t의 산술평균 y_A는 다음과 같이 정의되었다.

$$y_A = \beta z_A + (1-\beta) f_A \tag{2}$$

식 (2)는 〈그림 1〉에서 직선 $y_A[\beta]$를 의미하는데 직선 상의 점 A의 좌표가 $A = (z_A, f_A)$이다. 우리의 목표는 이 점의 좌표를 규명하여 β를 구하는 것이다. 식 (2)에서 새로운 계수 γ를 다음과 같이 정의한다.

$$\gamma y_A = \beta z_A, \quad (1-\gamma)y_A = (1-\beta)f_A \tag{54}$$

정의 (54)는 다음을 의미한다.

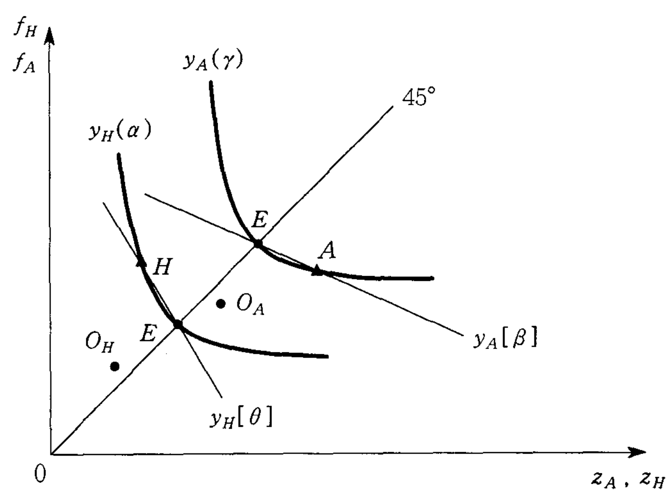
소문자공간의 쌍곡선 $y_A(\gamma)$ $$\frac{1}{y_A} = \frac{\gamma}{z_A} + 1 - \frac{\gamma}{f_A} \tag{55}$$

이 식은 〈그림 1〉에서 y_A와 가중치 γ가 일정할 때 z_A와 f_A 사이에 직각쌍곡선 $y_A(\gamma)$를 나타내는데 중심의 좌표는 $O_A = (\gamma y_A, (1-\gamma)y_A)$이다.

직선 (2)와 쌍곡선 (55)는 모두 식 (1)에서 유래되지만 분명히 독립이다. 이것은 식 (1)이 드러나지 않은 많은 방정식을 내포하고 있다는 또 다른 증거이다. 이 사실은 〈도표 1〉의 방정식이 모두 독립이라는 점을 간접적으로 보여준다.

〈그림 1〉에서 쌍곡선 $y_A(\gamma)$와 직선 $y_A[\beta]$는 두 점에서 만난다. 이 가운데 45° 선에서 만나는 자명한 풀이 E를 배제하면 점 A가 진짜 풀이이다. 점 A에서 쌍곡선 $y_A(\gamma)$의 기울기는 접선의 기울기 p_A와 일치한다.

그림 1 **소문자공간**



소문자공간의 기울기 $$p_A = \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{f_A}{z_A}\right)^2 \tag{56}$$

등호의 오른쪽은 쌍곡선의 기울기이고, 왼쪽은 접선의 기울기이다.

2. 대문자공간

대문자공간의 회귀방정식 (8)에서 확률변수 Y_t의 산술평균 Y_A는 다음과 같이 정의되었다.

대문자공간의 직선 $Y_A[\alpha]$ $$Y_A = \alpha Z_A + (1-\alpha)F_A \tag{9}$$

식 (9)는 〈그림 2〉에서 직선 $Y_A[\alpha]$를 의미하는데 직선 상의 점 A^{-1}의 좌표가 $A^{-1}=(Z_A, F_A)$이다. 변수전환을 사용하면 식 (9)는 다음과 같다.

소문자공간의 쌍곡선 $y_H(\alpha)$ $$\frac{1}{y_H} = \frac{\alpha}{z_H} + \frac{1-\alpha}{f_H} \tag{57}$$

대문자공간의 직선 (9)는 소문자공간에서는 곡선 (57)이 되는데 이 식은 〈그림 1〉에서 y_H와 가중치 α가 일정할 때 z_H와 f_H 사이에 직각쌍곡선 $y_H(\alpha)$를 나타내는데 중심의 좌표는 $O_H=(\alpha y_H, (1-\alpha)y_H)$이다. 직선 (9)에서 다음을 정의한다.

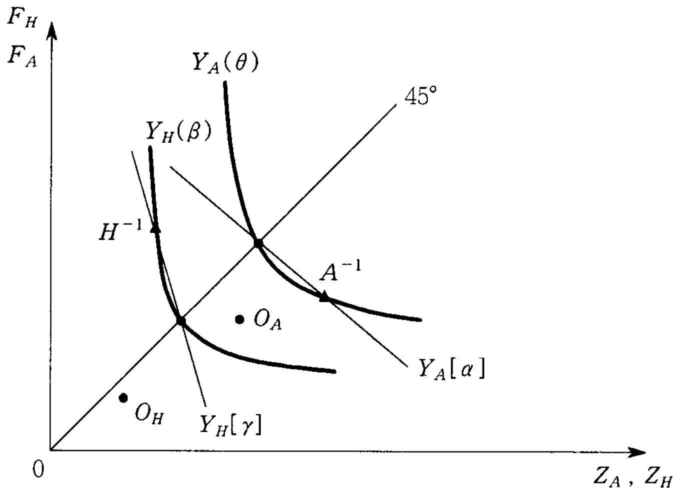
$$\theta Y_A = \alpha Z_A, \qquad (1-\theta)Y_A = (1-\theta)F_A \tag{58}$$

정의 (58)은 다음을 의미한다.

대문자공간의 쌍곡선 $Y_A(\theta)$ $$\frac{1}{Y_A} = \frac{\theta}{Z_A} + \frac{1-\theta}{F_A} \tag{59}$$

이 식은 〈그림 2〉의 대문자공간에서 중심의 좌표가 $O_A = (\theta Y_A, (1-\theta)Y_A)$인 쌍곡선이다. 변수전환을 이용하면 식 (59)는 다음과 동일하다.

그림 2 대문자공간



소문자공간의 직선 $y_H[\theta]$ $\quad y_H = \theta z_H + (1-\theta)f_H \qquad (60)$

대문자공간에서 곡선 (59)는 소문자공간에서 직선 (60)이 된다. 식 (60)은 〈그림 1〉에서 직선 $y_H(\theta)$를 나타낸다. $y_A > y_H$이므로 직선 $y_H[\theta]$는 직선 $y_A[\beta]$보다 원점에 가깝다. 식 (9)와 식 (57), 식 (60)은 모두 대문자공간의 회귀방정식 (8)에서 유도한 것이다. 〈그림 1〉에서 직선 $y_H[\theta]$와 쌍곡선 $y_H(\alpha)$는 두 점에서 만난다. 이 가운데 45° 선에서 만나는 자명한 풀이 E를 배제하면 점 H가 진짜 풀이이다. 〈그림 1〉의 점 H에서 쌍곡선 $y_H(\alpha)$의 기울기는 접선의 기울기 p_H와 일치한다.

소문자공간의 기울기 $\quad p_H = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\left(\dfrac{f_H}{z_H}\right)^2 \qquad (61)$

등호의 오른쪽은 쌍곡선의 기울기이고, 왼쪽은 접선의 기울기이다. 이상의 모든 방정식은 대문자공간의 식 (9)에서 유래되는데 소문자공간에서 표현한 것이다. 동일한 내용을 대문자공간에서 표현할 수 있다. 〈그림 2〉의 대문자공간에서 쌍곡선 $Y_A(\theta)$는 식 (59)이고, 직선 $Y_A[\alpha]$는 식 (9)이다. 쌍곡선과 직선은 두 점에서 만난다. 그 가운데 45° 선 상의 자명

한 점 E^{-1}을 배제하면 점 A^{-1}이 진짜 풀이이며 소문자공간의 진짜풀이 점 H의 그림자이다. 점 A^{-1}에서 쌍곡선의 기울기는 접선의 기울기 q_A와 일치한다.

대문자공간의 기울기 $$q_A = \frac{\theta}{1-\theta}\left(\frac{F_A}{Z_A}\right)^2 \qquad (62)$$

등호의 오른쪽은 쌍곡선의 기울기이고, 왼쪽은 접선의 기울기이다.
한편 소문자공간의 식 (2)는 대문자공간에서 쌍곡선이 된다.

대문자공간의 쌍곡선 $Y_H(\beta)$ $$\frac{1}{Y_H} = \frac{\beta}{Z_H} + \frac{1-\beta}{F_H} \qquad (63)$$

이 쌍곡선은 〈그림 2〉에서 중심의 좌표가 $O_H = (\beta Y_H, (1-\beta)Y_H)$이다. 소문자공간의 쌍곡선 (55)는 대문자공간에서 다음과 같은 직선이 된다.

대문자공간의 직선 $Y_H[\gamma]$ $$Y_H = \gamma Z_H + (1-\gamma)F_H \qquad (64)$$

〈그림 2〉에서 쌍곡선 $Y_H(\beta)$와 직선 $Y_H[\gamma]$는 두 점에서 만난다. 이 가운데 45°선에서 만나는 자명한 풀이 E^{-1}을 배제하면 점 H^{-1}이 진짜 풀이이다. 점 H^{-1}에서 쌍곡선 $Y_H(\beta)$의 기울기는 접선의 기울기 q_H와 일치한다.

대문자공간의 기울기 $$q_H = \frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{F_H}{Z_H}\right)^2 \qquad (65)$$

등호의 오른쪽은 쌍곡선의 기울기이고, 왼쪽은 접선의 기울기이다. 대문자공간의 점 H^{-1}은 소문자공간의 점 A의 그림자이다.

Ⅶ. 가중치의 결정 2

지금까지의 논의의 진행에서 드러난 독립방정식이 파생되는 순서를 〈도표 2〉가 요약한다.

도표 2 **산술평균식과 조화평균식의 파생 체계**

$$
\begin{array}{cccc}
 & y_t = \beta z_t + (1-\beta)f_t + \varepsilon_t & & \\
 & & \searrow & \\
 & \Downarrow & & Y_t = \alpha Z_t + (1-\alpha)F_t + u_t \\
 & & & \Downarrow \\
q_H = \dfrac{\beta}{1-\beta}\left(\dfrac{z_H}{f_H}\right)^2 & \Leftarrow\ y_A = \beta z_A + (1-\beta)f_A & & Y_A = \alpha Z_A + (1-\alpha)F_A \\
 & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & \dfrac{1}{y_A} = \dfrac{\gamma}{z_A} + \dfrac{1-\gamma}{f_A} & & \dfrac{1}{y_H} = \dfrac{\alpha}{z_H} + \dfrac{1-\alpha}{f_H} \\
\swarrow & & \swarrow & \searrow \\
p_A = \dfrac{\gamma}{1-\gamma}\left(\dfrac{f_A}{z_A}\right)^2 & & y_H = \theta z_H + (1-\theta)f_H & p_H = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\left(\dfrac{f_H}{z_H}\right)^2 \\
 & & \Downarrow & \\
 & & q_A = \dfrac{\theta}{1-\theta}\left(\dfrac{z_A}{f_A}\right)^2 &
\end{array}
$$

〈도표 2〉를 소문자공간에서 표현하면 다음과 같이 연립방정식 체계 2로 요약할 수 있다.

〈연립방정식 체계 2〉

$$\frac{1}{y_A} = \frac{\gamma}{z_A} + \frac{1-\gamma}{f_A} \tag{55}$$

$$y_A = \beta z_A + (1-\beta)f_A \tag{2}$$

$$p_A = \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{f_A}{z_A}\right)^2 \tag{56}$$

$$q_H = \frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{z_H}{f_H}\right)^2 \tag{65}$$

$$\frac{1}{y_H} = \frac{\alpha}{z_H} + \frac{1-\alpha}{f_H} \tag{57}$$

$$y_H = \theta z_H + (1-\theta)f_H \tag{60}$$

$$p_H = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{f_H}{z_H}\right)^2 \tag{61}$$

$$q_A = \frac{\theta}{1-\theta}\left(\frac{z_A}{f_A}\right)^2 \tag{62}$$

이 식들은 모두 독립이다. 식 (2), 식 (65), 식 (60), 식 (62)에서 변수 전환을 이미 이용하였다. 8개의 독립방정식에는 12개의 미지수 ($\alpha, \beta, \gamma, \theta, z_A, f_A, z_H, f_H, p_A, p_H, q_A, q_H$)가 있다. 4개의 방정식이 부족하다. 부족한 방정식을 위하여 기하평균 y_G를 사용할 차례이다.

Ⅷ. 가중치의 결정 3

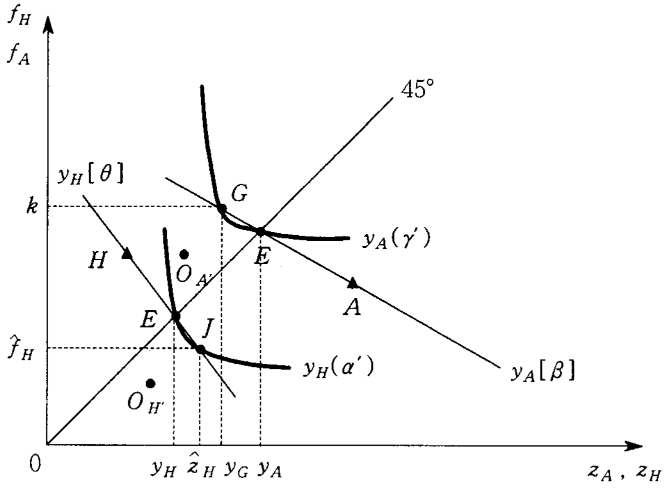
앞에서 산술평균과 조화평균을 추가적인 정보로 사용하였지만 기하평균은 사용하지 않았다. 연립방정식 체계 2에서 부족한 방정식을 기하평균 y_G의 사용이 보충해 줄 것이다. 〈그림 3〉은 〈그림 1〉의 재생이지만 추가적인 정보가 포함되었다. 실제 우리가 규명하고자 하는 좌표는 점 A이다(이 점은 〈그림 1〉의 점 A와 동일하다). 그러나 방정식의 부족으로 이 점을 직접 규명하지 못하므로 추가적인 정보인 기하평균 y_G를 사용한다. 식 (2)에서 하나의 주어진 산술평균 y_A를 동일한 가중치 β로 설명할 수 있는 두 요인 (z_A, f_A)의 조합은 무한대이다. 이 가운데 좌표 $G = (y_G, k)$를 선택한다. $y_A > y_G > y_H$이므로 점 G의 가로축의 위치는 y_A와 y_H 사이에 있다. 따라서 식 (2)는 다음과 같이 표기할 수 있다.

소문자공간의 직선 $y_A[\beta]$ $\quad y_A = \beta y_G + (1-\beta)k$ (66)

식 (66)은 식 (2)와 동일하다. 다만 y_A를 동일 직선 상에서 다른 좌표로 표현한 것뿐이다. 따라서 식 (66)은 〈그림 3〉의 $G = (y_G, k)$좌표에서 직선 $y_A[\beta]$를 나타낸다. 다시 말하면 점 G와 점 A는 동일한 직선 $y_A[\beta]$ 상에 있다. 식 (2)와 식 (66)은 다음을 의미한다.

$$-\frac{\beta}{1-\beta} = \frac{k-f_A}{y_G-z_A} \tag{67}$$

그림 3 소문자공간



등호의 왼쪽은 〈그림 3〉에서 직선 $y_A[\beta]$의 기울기이며, 오른쪽은 두 점 G와 A 사이의 기울기이다. 여기서 y_G는 확률변수 y_t의 기하평균인데 $y_A > y_G$이다. 가중치가 $1 > \beta > 0$이므로 식 (2)에서 $k > y_A > y_G$이다. 다음을 정의한다.

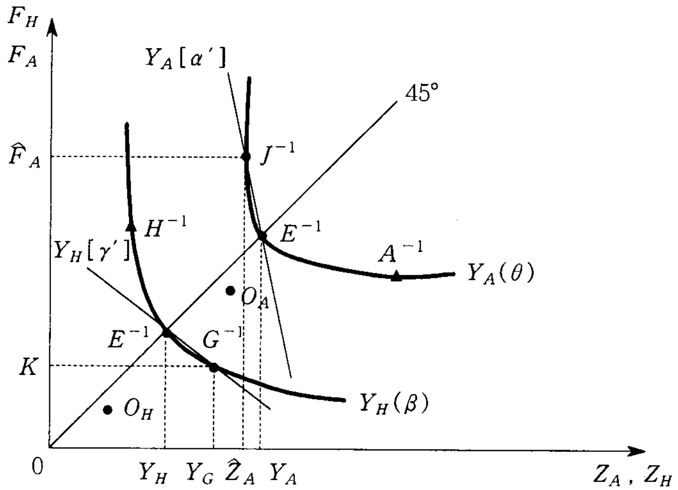
$$\gamma' y_A = \beta y_G, \quad (1-\gamma')y_A = (1-\beta)k \tag{68}$$

정의 (68)은 다음을 의미한다.

소문자공간의 쌍곡선 $y_A(\gamma')$ $$\frac{1}{y_A} = \frac{\gamma'}{y_G} + \frac{1-\gamma'}{k} \tag{69}$$

이 식은 〈그림 3〉에서 y_A와 가중치 γ'가 일정할 때 y_G와 k 사이에 직각쌍곡선 $y_A(\gamma')$을 나타내는데 중심의 좌표는 $O_{A'} = (\gamma' y_A, (1-\gamma')y_A)$이다. 〈그림 3〉에서 쌍곡선 $y_A(\gamma')$와 직선 $y_A[\beta]$는 두 점에서 만난다. 이 가운데 45° 선에서 만나는 자명한 풀이 E를 배제하면 점 G가 진짜 풀이이다. 점 G에서 쌍곡선 $y_A(\gamma')$의 기울기는 쌍곡선에 대한 접선의 기울기 p_G와 일치한다.

그림 4 대문자공간



소문자공간의 기울기 $$p_G = \frac{\gamma'}{1-\gamma'}\left(\frac{k}{y_G}\right)^2 \tag{70}$$

등호의 오른쪽은 쌍곡선의 기울기이고, 왼쪽은 접선의 기울기이다. 변수전환 $y_A Y_H = 1$, $y_G Y_G = 1$, $kK = 1$을 이용하면 식 (69)는 다음과 동일하다.

대문자공간의 직선 $Y_H[\gamma']$ $$Y_H = \gamma' Y_G + (1-\gamma')K \tag{71}$$

〈그림 3〉의 소문자공간에서 곡선 (69)는 〈그림 4〉의 대문자공간에서 직선 (71)이 된다. 직선의 이름은 $Y_H[\gamma']$이다. 마찬가지로 소문자공간의 직선 (66)을 대문자공간으로 변수전환하면 다음과 같다.

대문자공간의 쌍곡선 $Y_H(\beta)$ $$\frac{1}{Y_H} = \frac{\beta}{Y_G} + \frac{1-\beta}{K} \tag{72}$$

식 (72)는 〈그림 4〉의 대문자공간에서 쌍곡선 $Y_H(\beta)$이다. 쌍곡선 (72)와 직선 (71)은 두 점에서 만난다. 그 가운데 45°선의 자명한 풀이

E^{-1}은 배제하면 점 G^{-1}이 진짜 풀이이며 〈그림 1〉의 소문자공간의 진짜 풀이 G의 그림자이다. 점 G^{-1}의 가로축의 위치는 Y_A와 Y_H 사이에 있다. 점 G^{-1}에서 쌍곡선의 기울기와 접선의 기울기 q_G는 일치한다.

대문자공간의 기울기

$$q_G = \frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{K}{Y_G}\right)^2 = \frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{y_G}{k}\right)^2 \tag{73}$$

한편 점 G에서 쌍곡선의 기울기 (70)과 1 대 1의 관계를 맺는 기울기를 갖는 또 하나의 쌍곡선을 식 (60)의 한 좌표 $J=(\hat{z}_H, \hat{f}_H)$에서 정의할 수 있다. 먼저 식 (60)에서 하나의 주어진 조화평균 y_H를 동일한 가중치 θ로 설명할 수 있는 두 요인 (z_H, f_H)의 조합은 무한대이다. 이 가운데 좌표 $J=(\hat{z}_H, \hat{f}_H)$을 선택한다. 따라서 식 (60)은 다음과 같이 표기할 수 있다.

소문자공간의 직선 $y_H[\theta]$ $$y_H = \theta\hat{z}_H + (1-\theta)\hat{f}_H \tag{74}$$

식 (74)는 식 (60)과 동일하다. 다만 y_H를 다른 좌표에서 표현한 것뿐이다. 따라서 식 (74)는 〈그림 3〉의 $(\hat{z}_H, \hat{f}_H)$좌표에서 직선 $y_H[\theta]$을 나타낸다. 직선 (74)를 변수전환하면 대문자공간에서 다음과 같다.

$$\frac{1}{Y_A} = \frac{\theta}{\hat{Z}_A} + \frac{1-\theta}{\hat{F}_A} \tag{75}$$

식 (60)과 식 (74)는 다음을 의미한다.

$$-\frac{\theta}{1-\theta} = \frac{\hat{f}_H - f_H}{\hat{z}_H - z_H} \tag{76}$$

등호의 왼쪽은 〈그림 3〉에서 직선 $y_H[\theta]$의 기울기이며, 오른쪽은 두 점 H와 J 사이의 기울기이다. 다음을 정의한다.

$$\alpha' y_H = \theta \hat{z}_H, \quad (1-\alpha')y_H = (1-\theta)\hat{f}_H \tag{77}$$

정의 (77)은 다음을 의미한다.

소문자공간의 쌍곡선 $y_H(\alpha')$ $$\frac{1}{y_H} = \frac{\alpha'}{\hat{z}_H} + \frac{1-\alpha'}{\hat{f}_H} \tag{78}$$

이 식은 〈그림 3〉에서 y_H와 가중치 α'이 일정할 때 $\hat{z}_H$와 $\hat{f}_H$ 사이에 쌍곡선 $y_H(\alpha')$을 나타내는데 중심의 좌표는 $O_{H'} = (\alpha' y_H, (1-\alpha')y_H)$이다. 〈그림 3〉에서 쌍곡선 $y_H(\alpha')$과 직선 $y_H[\theta]$는 두 점에서 만난다. 이 가운데 45° 선에서 만나는 자명한 풀이 E를 배제하면 점 J가 진짜 풀이이다. 점 J에서 쌍곡선 $y_H(\alpha')$의 기울기는 쌍곡선에 대한 접선의 기울기 $\hat{p}_H$와 일치한다.

소문자공간의 기울기 $$\hat{p}_H = \frac{\alpha'}{1-\alpha'}\left(\frac{\hat{f}_H}{\hat{z}_H}\right)^2 \tag{79}$$

등호의 오른쪽은 쌍곡선의 기울기이고, 왼쪽은 접선의 기울기이다. 〈그림 3〉에서 소문자공간의 두 점 G와 J 사이의 관계는 다음과 같다(증명은 김학은 (2001) 참조).

$$p_G \hat{p}_H = \frac{\gamma'}{1-\gamma'}\frac{\alpha'}{1-\alpha'}\Delta^2 \tag{80}$$

여기서 Δ은 소문자공간의 두 쌍곡선의 중심 $O_{A'}$과 $O_{H'}$을 연결한 직선의 기울기로서 다음과 같다.

$$\Delta = \frac{(1-\gamma')y_A - (1-\alpha')y_H}{\gamma' y_A - \alpha' y_H} \tag{81}$$

식 (80)은 두 쌍곡선의 점 G의 기울기와 점 J의 기울기가 1 대 1의 유일하고 고유한 관계가 성립하는 식이다. 이러한 관계는 연립방정식 체계 2에서 2개의 쌍곡선에서는 보장되지 않지만 여기서는 성립하는 이유는

식 (80)이 새로운 가중치 γ'과 α'을 결정하기 때문이다. 이에 대하여 연립방정식 체계 2에서는 모든 가중치들은 고유하게 결정되므로 점 A와 점 H의 관계가 식 (80)처럼 된다는 보장이 없다.

다음, 쌍곡선 (78)을 변수전환하면 다음과 같다.

대문자공간의 직선 $Y_A[\alpha']$ $$Y_A = \alpha' \hat{Z}_A + (1-\alpha')\hat{F}_A \tag{82}$$

식 (82)는 〈그림 4〉의 대문자공간에서 직선 $Y_A[\alpha']$이다. 직선 (82)와 쌍곡선 (71)은 두 점에서 만난다. 그 가운데 45°선의 자명한 풀이 E^{-1}은 배제하면 점 J^{-1}이 진짜 풀이이며 〈그림 1〉의 소문자공간의 진짜 풀이 J의 그림자이다. 점 J^{-1}에서 쌍곡선의 기울기와 접선의 기울기 q_G는 일치한다.

대문자공간의 기울기 $$\hat{q}_H = \frac{\theta}{1-\theta}\left(\frac{\hat{F}_A}{\hat{Z}_A}\right)^2 = \frac{\theta}{1-\theta}\left(\frac{\hat{z}_H}{\hat{f}_H}\right)^2 \tag{83}$$

〈그림 4〉에서 대문자공간의 두 점 G^{-1}과 J^{-1} 사이의 관계는 다음과 같다(증명은 김학은 (2001) 참조).

$$q_G \hat{q}_H = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta}{1-\theta}\Omega^2 \tag{84}$$

여기서 Ω는 대문자공간의 두 쌍곡선의 중심 O_A와 O_H를 연결한 직선의 기울기로서 다음과 같다.

$$\Omega = \frac{(1-\theta)y_A - (1-\beta)y_H}{\theta y_A - \beta y_H} \tag{85}$$

이상의 방정식은 모두 소문자공간의 회귀방정식 (1)에서 유도한 것이다.

Ⅸ. 가중치의 결정 4

이상에서 〈그림 3〉과 〈그림 4〉에서 구한 10개의 독립방정식은 다음과 같다.

〈연립방정식 체계 3〉

$$\frac{1}{y_A} = \frac{\gamma'}{y_G} + \frac{1-\gamma'}{k} \tag{69}$$

$$y_A = \beta y_G + (1-\beta)k \tag{66}$$

$$p_G = \frac{\gamma'}{1-\gamma'}\left(\frac{k}{y_G}\right)^2 \tag{70}$$

$$q_G = \frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{y_G}{k}\right)^2 \tag{73}$$

$$\frac{1}{y_H} = \frac{\alpha'}{\hat{z}_H} + \frac{1-\alpha'}{\hat{f}_H} \tag{78}$$

$$y_H = \theta \hat{z}_H + (1-\theta)\hat{f}_H \tag{74}$$

$$\hat{p}_H = \frac{\alpha'}{1-\alpha'}\left(\frac{\hat{f}_H}{\hat{z}_H}\right)^2 \tag{79}$$

$$\hat{q}_H = \frac{\theta}{1-\theta}\left(\frac{\hat{z}_H}{\hat{f}_H}\right)^2 \tag{83}$$

$$p_G\hat{p}_H = \frac{\gamma'}{1-\gamma'}\frac{\alpha'}{1-\alpha'}\Delta^2 \tag{80}$$

$$q_G\hat{q}_H = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta}{1-\theta}\Omega^2 \tag{84}$$

10개의 방정식에서 우리에게 알려진 정보는 3개의 (y_A, y_H, y_G)이다. 알려지지 않은 정보는 11개의 미지수($\alpha', \beta, \gamma', \theta,\ k, \hat{z}_H, \hat{f}_H, p_G,\ \hat{p}_H, q_G, \hat{q}_H$)이다. 방정식이 1개 부족하지만 불완전한 풀이는 다음과 같다.

우선 10개의 독립방정식은 다음과 같이 2개의 방정식으로 요약될 수 있다.

$$\Delta\Omega = 1 \tag{86}$$

$$\frac{\alpha'}{1-\alpha'}\frac{\gamma'}{1-\gamma'} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta}{1-\theta}\Omega \tag{87}$$

식 (86)은 식 (70), 식 (79), 식 (80), 식 (73), 식 (83), 식 (84)에서 유도된다. 식 (87)은 나머지 식 (69), 식 (66), 식 (78), 식 (74)에서 유도된다. 소문자공간의 변수와 대문자공간의 변수 사이는 역관계이며 이 관계를 이용하여 두 공간 사이에 변수전환이 가능하였다. 이 같은 역수관계 변수전환의 예외는 〈정리 2〉에 의하면 오차 사이의 관계이다. 그러나 식 (86)에 의하여 변수전환 역수관계의 또 하나의 예가 각 공간의 두 쌍곡선의 중심을 연결한 직선의 기울기 사이에서 관찰된다. 식 (86)은 소문자공간의 두 곡선과 두 직선으로 결정되는 균형과 대문자공간의 두 곡선과 두 직선으로 결정되는 균형이 동시에 형성된다는 뜻이다. 이 때 대문자공간의 직선은 소문자공간의 쌍곡선이 되고, 대문자공간의 쌍곡선은 소문자공간의 직선이 되며, 그 역도 성립한다. 쌍곡선은 대수적으로 조화평균이고 직선은 대수적으로 산술평균이다. 그러므로 대문자공간의 산술평균은 소문자공간의 조화평균이고, 그 역도 성립한다. 〈정리 3〉은 하나의 공간에서 균형은 다른 공간의 균형의 그림자이며 두 균형이 동시에 결정된다는 뜻이다. 다음 절로 이동하기 전에 소문자공간과 대문자공간 사이의 변수전환을 종합적으로 다음과 같이 요약할 수 있다.

요약 1 $y_A Y_H = 1$, $y_H Y_A = 1$, $y_G Y_G = 1$, $kK = 1$, $wW = 1$, $\Delta\Omega = 1$, $0 > \varepsilon u \geq -1$.

요약 2 소문자공간에서 y_A가 y_G와 k의 산술평균이면 대문자공간에서는 조화평균이다.

요약 3 소문자공간에서 y_H가 y_G와 w의 산술평균이면 대문자공간에서는 조화평균이다.

식 (86)을 식 (87)에 α'에 대하여 대입하여 정리하면 다음과 같이 2차 방정식이 된다.

$$X\left(\frac{y_A}{y_G}\right)^2 + 2\Gamma\left(\frac{y_A}{y_G}\right) + \Phi = 0 \tag{88}$$

이번에는 마찬가지 방법으로 식 (86)을 식 (87)에 γ'에 대하여 대입하여 정리하면 다음과 같이 2차 방정식이 된다.

$$M\left(\frac{y_H}{y_G}\right)^2 + 2N\left(\frac{y_H}{y_G}\right) + \Pi = 0 \tag{89}$$

이 과정에서 다음이 성립한다(증명 생략).

$$1 > \beta > 0 \tag{90}$$

$$1 > \theta > 0 \tag{91}$$

따라서 2차 방정식 (88)과 (89)의 풀이는 다음과 같다.

$$\frac{y_A}{y_G} = \frac{\beta\left[1+\left(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta}{1-\theta}\Omega\right)^{1/2}\right]}{(1-Q_A)\left(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta}{1-\theta}\Omega\right)^{1/2} - Q_A} \tag{92}$$

$$\frac{y_H}{\hat{z}_H} = \frac{\theta\left[1+\left(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta}{1-\theta}\Omega\right)^{1/2}\right]}{(1-Q_H)\left(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta}{1-\theta}\Omega\right)^{1/2} - Q_H} \tag{93}$$

여기서

$$Q_A = \frac{\left(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta}{1-\theta}\Omega\right)^{1/2}\left[(1-D_A^{1/2}) + \left(D_A - \frac{y_A}{y_H}\right)^{1/2}\right]}{1 - \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta}{1-\theta}\Omega} \tag{94}$$

$$D_A = \frac{1-\beta}{\beta}\frac{1-\theta}{\theta}\frac{1}{\Omega}\left[\frac{1}{2}\frac{\Omega}{1+\Omega}\left(\frac{y_A}{y_H}-1\right)\left(1+\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right]^2 + \frac{y_A}{y_H} \tag{95}$$

$$Q_H = \frac{\left(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta}{1-\theta}\Omega\right)^{1/2}\left[(1-D_H^{1/2}) + \left(D_H - \frac{y_H}{y_A}\right)^{1/2}\right]}{1 - \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta}{1-\theta}\Omega} \tag{96}$$

$$D_H = \frac{1-\beta}{\beta}\frac{1-\theta}{\theta}\frac{1}{\Omega}\left[\frac{1}{2}\frac{\Omega}{1+\Omega}\left(\frac{y_H}{y_A}-1\right)\left(1+\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right]^2 + \frac{y_H}{y_A} \tag{97}$$

2개의 식 (92)와 식 (93)은 3개의 알려진 정보 (y_A, y_H, y_G)와 3개의

미지수($\beta, \theta, \hat{z}_H$)를 갖고 있다. 즉, 식 (92)와 식 (93)을 줄여서 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{y_A}{y_G} = h\left(\beta, \theta, \frac{y_A}{y_H}, \Omega\right) \tag{98}$$

$$\frac{y_H}{\hat{z}_H} = l\left(\beta, \theta, \frac{y_H}{y_A}, \Omega\right) \tag{99}$$

X. 가중치의 결정 5

앞 절에서 우리는 가중평균 y_G를 산술평균 y_A의 식 (2)에 연결하였다. 이번에는 동일한 방법을 사용하여 가중평균 y_G를 조화평균 y_H의 식 (60)과 연결할 차례이다. 그 결과 연립방정식 체계는 다음과 같다.

〈연립방정식 체계 4〉

$$\frac{1}{y_A} = \frac{\gamma''}{\hat{z}_A} + \frac{1-\gamma''}{\hat{f}_A} \tag{100}$$

$$y_A = \beta\hat{z}_A + (1-\beta)\hat{f}_A \tag{101}$$

$$\hat{p}_G = \frac{\gamma''}{1-\gamma''}\left(\frac{\hat{f}_A}{\hat{z}_A}\right)^2 \tag{102}$$

$$\hat{q}_G = \frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{\hat{z}_A}{\hat{f}_A}\right)^2 \tag{103}$$

$$\frac{1}{y_H} = \frac{\alpha''}{y_G} + \frac{1-\alpha''}{w} \tag{104}$$

$$y_H = \theta y_G + (1-\theta)w \tag{105}$$

$$p_H = \frac{\alpha''}{1-\alpha''}\left(\frac{w}{y_G}\right)^2 \tag{106}$$

$$q_H = \frac{\theta}{1-\theta}\left(\frac{y_G}{w}\right)^2 \tag{107}$$

$$\hat{p}_G p_H = \frac{\gamma''}{1-\gamma''}\frac{\alpha''}{1-\alpha''}\hat{\Delta}^2 \tag{108}$$

$$\hat{q}_G q_H = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta}{1-\theta}\hat{\Omega}^2 \tag{109}$$

그림 5 소문자공간

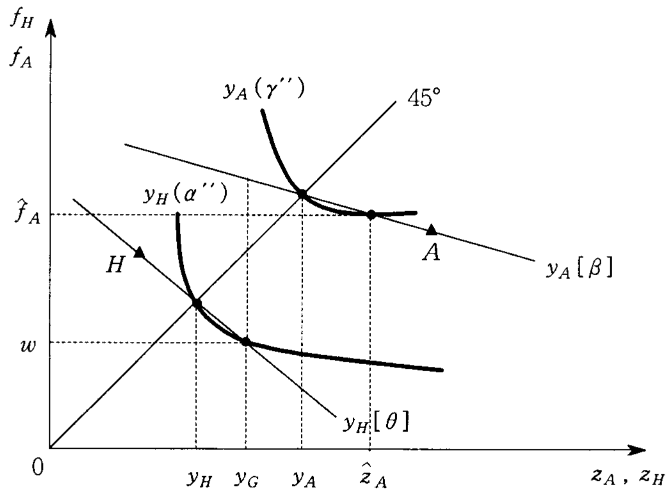
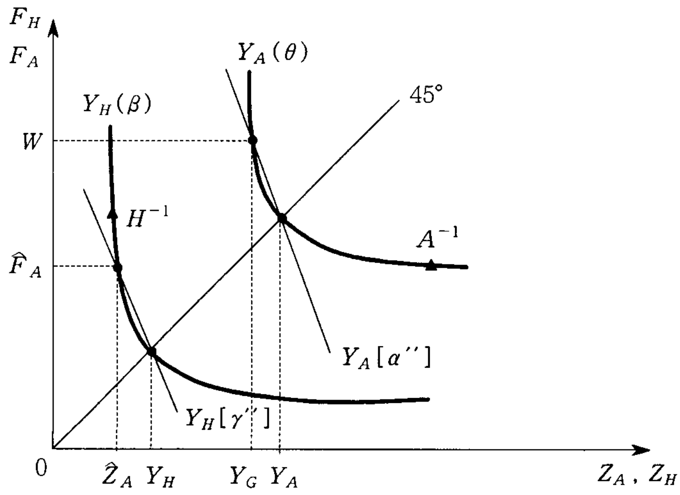


그림 6 대문자공간



10개의 방정식에서 우리에게 알려진 정보는 3개의 (y_A, y_H, y_G)이다. 알려지지 않은 정보는 11개의 미지수($\alpha'', \beta, \gamma'', \theta$, $w, \hat{z}_A, \hat{f}_A, \hat{p}_G, p_H, \hat{q}_G, q_H$)이다. 〈그림 5〉와 〈그림 6〉이 연립방정식 체계 4를 그리고 있다. 불완전한 풀이는 다음과 같다.

$$\frac{y_A}{\hat{z}_A} = j\left(\beta, \theta, \frac{y_A}{y_H}, \hat{\Omega}\right) \tag{110}$$

$$\frac{y_H}{y_G} = m\left(\beta, \theta, \frac{y_H}{y_A}, \hat{\Omega}\right) \tag{111}$$

2개의 식은 3개의 미지수($\beta, \theta, \hat{z}_A$)를 갖고 있다. 여기서 $\hat{\Omega} = \Omega$이다.

XI. 가중치의 풀이

β의 풀이 : 그러나 연립방정식 체계 3과 연립방정식 체계 4에서 β와 θ는 공통이다. 따라서 두 체계를 합치면 20개의 독립방정식과 20개의 미지수가 된다. 풀이가 존재한다. 즉, 20개의 식이 4개의 식으로 요약되는데 그것은 다음과 같다.

$$\frac{y_A}{y_G} = h\left(\beta, \theta, \frac{y_A}{y_H}, \Omega\right) \tag{98}$$

$$\frac{y_H}{\hat{z}_H} = l\left(\beta, \theta, \frac{y_H}{y_A}, \Omega\right) \tag{99}$$

$$\frac{y_A}{\hat{z}_A} = j\left(\beta, \theta, \frac{y_A}{y_H}, \hat{\Omega}\right) \tag{110}$$

$$\frac{y_H}{y_G} = m\left(\beta, \theta, \frac{y_H}{y_A}, \hat{\Omega}\right) \tag{111}$$

4개의 식은 4개의 미지수(β, θ, $\hat{z}_A$, $\hat{z}_H$)를 갖고 있어서 풀이가 존재한다. 특히 식 (98)과 식 (111)은

$$\frac{y_A}{y_G} = h\left(\beta, \theta, \frac{y_A}{y_H}, \Omega\right) \tag{98}$$

$$\frac{y_H}{y_G} = m\left(\beta, \theta, \frac{y_H}{y_A}, \hat{\Omega}\right) \tag{111}$$

최종적으로 2개의 방정식에 2개의 미지수(β, θ)이다. 2개의 방정식의 형태가 복잡하지만 $1>\beta>0$이고 $1>\theta>0$이므로 반복적인 방법(recursive method)을 컴퓨터 프로그래밍에 적용하여 풀 수 있다.

α의 풀이 : 지금까지 β의 풀이는 소문자공간의 식 (2)에서 유래된 것이다. 동일한 방법을 대문자공간의 식 (9)에 적용하면 α가 구해진다.

XII. 두 요인과 두 오차의 풀이

이상에서 구한 가중치 α와 β를 연립방정식 체계 1에 대입하면 두 요인 z_t와 f_t, 그리고 두 오차 ε_t와 u_t가 구해진다.

XIII. 정보발생확률 함수

우리의 최초의 출발점인 소문자공간의 회귀방정식 (1)로 돌아가자.

소문자공간의 회귀방정식 $\quad y_t = \beta z_t + (1-\beta)f_t + \varepsilon_t \quad (1)$

지금까지 우리가 분석한 것은 확률변수 y_t가 주어졌을 때 식 (1)의 두 요인 z_t와 f_t, 가중치 β와 오차 ε_t를 구할 수 있었다. 이러한 정보를 갖고 y_t의 모집단을 발생시킬 수 있다. 앞서 식 (1)을 다음과 같이 관측평행직선으로 표현하였다.

관측평행직선 $\quad y_t = \beta z_t^* + (1-\beta)f_t^* \quad (13)$

여기서 $z_t^* = z_t + \varepsilon_t$이고 $f_t^* = f_t + \varepsilon_t$이다. 양변을 y_t로 나누면 다음과 같다.

$$1 = \frac{\beta z_t^*}{y_t} + \frac{(1-\beta)f_t^*}{y_t} = \hat{\beta}_t + (1-\hat{\beta}_t) \tag{112}$$

따라서 식 (13)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{y_t} = \frac{\hat{\beta}_t}{z_t^*} + \frac{1-\hat{\beta}_t}{f_t^*} = \frac{\hat{\beta}_t}{z_t + \varepsilon_t} + \frac{1-\hat{\beta}_t}{f_t + \varepsilon_t} \tag{113}$$

여기에 변수전환을 대입하면 다음이 된다.

$$Y_t' = \hat{\beta}_t Z_t + (1-\hat{\beta}_t)F_t, \quad \hat{\beta}_t \neq \beta_t \tag{114}$$

여기서

$$Y_t' = \{1 + [\beta Z_t + (1-\beta)F_t]\varepsilon_t\}Y_t \tag{115}$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$y_t' = \frac{1}{1 + [\beta Z_t + (1-\beta)F_t]\varepsilon_t} y_t \tag{116}$$

확률변수 y_t와 두 요인 z_t와 f_t, 오차 ε_t는 동일시점의 y_t'을 발생시킨다. 새로운 표본의 회귀방정식은 다음과 같다.

$$y_t' = \beta z_t + (1-\beta)f_t + \varepsilon_t' \tag{117}$$

여기서 새로운 오차의 표본 ε_t'이 구해지므로 동일한 방법을 식 (117)에 반복 적용하면

$$y_t'' = \frac{1}{1 + [\beta Z_t + (1-\beta)F_t]\varepsilon_t'} y_t' \tag{118}$$

이 발생한다. 식 (116)과 식 (118)이 정보발생확률함수이다.

XIV. 상태할인율

식 (116)을 일반화하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y_{tn+1} = \frac{1}{1+[\beta Z_t+(1-\beta)F_t]\varepsilon_{tn}} y_{tn} \tag{119}$$
$$= \frac{1}{1+\nu_t \varepsilon_{tn}} y_{tn}$$
$$= \frac{1}{1+\rho_{tn}} y_{tn}$$

여기서 n은 시계열의 모집단에서 t시점에서 실현된 표본이 모집단 가운데 임의의 n번째 표본이라는 뜻이다. 실현된 유일의 표본에서 실현되지 않고 숨어 있는 표본들을 찾아내는 발생함수 (119)에서 그 매개체는 할인율 ρ_{tn}이다. 즉, 정보발생확률함수 (119)를 보면 하나의 표본에서 새로운 표본을 발생시킬 때 그 매개변수는 할인율 $\rho_{tn}=\nu_t\varepsilon_{tn}$이다. 이 가운데 ν_t는 공통인자이다. 할인율은 양수일 수 있고 음수일 수도 있는데 양수인 경우는 할인율이지만 음수인 경우는 할증률이다. 그것은 오차 ε_{tn}의 부호에 달려 있다. 이것을 상태할인율이라고 부를 수 있다.

XV. 상태할인율의 의미

상태할인율의 의미를 이해하기 위하여 식 (1)의 확률변수 y_t가 소비라고 하자. 그러면 Arrow-Debreu의 상태가격과 von Neuman-Morgenstein 기대효용함수의 결합으로 한계기대효용균등의 법칙은 다음과 같다.

$$\frac{MV(y_{tn})}{MV(y_{tn+1})} = \frac{k_{tn}}{k_{tn+1}} = \frac{1+i_{tn+1}}{1+i_{tn}} \tag{120}$$

여기서 k_{tn}은 n상태의 확률할인가격(stochastic discount factor) 또는 가격심지(price kernel)이고, i_{tn}은 n상태의 이자율이다. 상대위험회피도가 γ인 *CRRA* 효용함수인 경우 식 (120)은 다음과 같다.

$$y_{tn+1} = \left(\frac{k_{tn}}{k_{tn+1}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} y_{tn} \tag{121}$$

그런데 확률할인가격의 정의를 대입하면 식 (121)은 다음과 같다.

$$y_{tn+1} = \frac{1}{(1 + i_{tn} - i_{tn+1})^{\frac{1}{\gamma}}} y_{tn} \tag{122}$$

$\gamma = 1$일 때 식 (122)를 식 (119)와 비교하면 상태할인율은 다음과 같다.

$$g_{tn+1} = g_{tn} - \nu \varepsilon_{tn} \tag{123}$$

여기서 g_{tn}은 $t-1$기와 t기 사이의 y_{tn}의 성장률이다. 또는 상태할인율은 다음과 같다.

$$\rho_{tn} = g_{tn} - g_{tn+1} \tag{124}$$

n번째 표본의 상태할인율은 $n+1$번째 표본과 n번째 표본 사이의 차이이다. 즉, 두 상태 사이의 소비비율이다.

XVI. 맺는 말

이 논문은 세 가지 목표를 달성하려고 하였다. 첫째, 하나의 시계열 확률변수의 평균을 두 도구변수로 설명할 때 가중평균으로 표현하였고, 이 가중평균에 오차를 포함하여 확률변수를 설명하였다. 이러한 수학적 표현이 가능한 공간을 소문자공간이라 이름하면 이와 동일한 현상의 그림자가

대문자공간에서 나타난다는 것을 밝혔다. 두 공간 사이의 유기적인 관계에서 소문자공간의 오차방정식과 대문자공간의 오차방정식을 생산할 수 있었다. 둘째, 소문자공간의 회귀방정식, 대문자공간의 회귀방정식, 소문자공간의 오차방정식, 대문자공간의 오차방정식은 4개의 방정식 체계를 형성하였다. 이 방정식 체계에서 2개의 도구변수와 2개의 가중치와 2개의 오차가 미지수이다. 셋째, 2개의 가중치를 구하기 위하여 새로운 정보로서 원래의 확률변수의 산술평균, 조화평균, 가중평균을 사용하여 두 공간 사이의 유기적인 관계를 이용하였다. 그 결과 2개의 오차와 2개의 도구변수의 시계열 표본이 구해진다. 넷째, 이 모든 결과를 이용하여 정보발생함수를 구할 수 있었는데 여기서도 두 공간 사이의 역학관계가 중요한 역할을 하였다.

하나의 확률변수는 한 시점에서 하나의 표본만 실현된다. 이 실현된 표본을 가지고 실현되지 않은 모집단을 밝혀내는 것은 첫째, 모집단의 확률분포를 이해하는데 도움이 된다. 둘째, 모집단의 회귀방정식을 구할 수 있다. 이것은 몬테칼로 방법과 다른 방법이다. 셋째, 미래변수를 예측하는데 예측력을 높일 수 있다. 넷째, 하나의 확률변수를 두 요인으로 분할할 수 있으면 각 요인 역시 두 요인으로 분할할 수 있다. 분할은 계속될 수 있다. 이것은 하나의 확률변수를 다요인으로 분할할 수 있음을 의미한다. 이러한 방법은 다요인모형인 재정가격결정모형에서 요인의 정체를 밝히는데 도움이 될 것이다.

◈ 참고문헌 ◈

김학은 (2001), "화폐유통속도의 수학적 분할", 『경제학연구』, 제49권, pp. 273~303.

______ (2004), "정보발생확률함수 I : 표본에서 모집단으로", 『한국경제학보』, 제11권, 제1호(2004년 봄), pp. 83~120.

Hildreth, C. and J. Houck (1968), "Some Estimators for a Linear Model with Random Coefficients," *Journal of American Statistical Association*, vol. 63, pp. 584~595.