

콜거울과 풋거울과 옵션가격결정

김 학 은*

Black-Scholes는 자산가격이 기하 브라운 운동을 따른다는 가정 하에 재정을 이용하여 옵션의 이론가격결정 모형을 유도하였으나 가격변동(표준편차)의 측정문제를 남겼다. 본 논문은 표준편차를 알지 못해도 옵션가격을 설명할 수 있다는 점을 보여준다. 이를 위하여 Black-Scholes방정식 체계의 구조를 점검하고 거울방정식과 반사방정식을 구한다. 2개의 방정식이 옵션가격결정의 2개의 가중치를 결정하게 된다.

I. 머 리 말

본 논문의 목적은 콜거울(call mirror)과 풋거울(put mirror)의 개념을 이용하여 무배당 표준 유럽형 옵션의 이론가격 모형을 유도하는 것이다. Black and Scholes [2]는 자산가격이 기하 브라운 운동을 따른다는 가정 하에 확률미분방정식에 기초한 옵션가격 모형을 유도하였는데 위험중립(risk-neutral) 모형이다. 이 모형에 의하면 옵션가격은 원상품(underlying asset) 가격과 행사가격의 일차선형(linear combination)으로 결정되는데 그 가중치는 다시 원상품가격, 행사가격, 잔여만기, 무위험이자율, 그리고 원상품수익률의 표준편차(standard deviation, volatility)에 달려 있다.¹⁾ 그러나 표준편차는 현실에서 실제로 관찰되지 않기 때

* 연세대학교 상경대학 경제학과, 서울특별시 서대문구 신촌동 134 우편번호 120-749.

문에 다른 대변수로 대체하여 옵션가격을 이론적으로 설명한다. 표준편차의 측정이 Black-Scholes 모형이 극복해야 할 과제이며 이에 대하여 많은 연구가 행해지고 있지만 변동하는 표준편차의 특성을 갖는 옵션가격의 일반이론은 아직 발견되지 않고 있다(Hull and White [11], Scott [19], Wiggins [22]).

본 논문은 표준편차 측정의 섬세한 문제를 해결하는 전혀 다른 방법으로 옵션가격을 설명한다. 현대 금융이론의 두 기둥은 확률미분방정식(stochastic differential equation)과 마팅게일(martingale)이다. 옵션가격결정의 확률미분방정식을 유도하는 브라운 운동(Brownian motion) 방정식에는 두 가지 불확실성이 포함되어 있다. 위너과정(Wiener process)과 원상품수익률의 표준편차이다. Black-Scholes의 방정식은 위험중립 세계에서 옵션가격결정에 관한 공식이므로 위너과정은 상쇄되어 등장하지 않는다. 나머지 하나의 불확실성인 원상품수익률의 표준편차만이 마지막으로 남는다. 그러나 Black-Scholes 방정식은 이마저도 만기 동안 고정된 상수로 취급하므로 '이론적으로' 보면 Black-Scholes 방정식은 확률방정식의 풀이이지만 '외형적으로' 보면 단순 일차선형의 비확률 방정식이 되었다.

본 논문이 추구하고자 하는 목표는 세 가지이다. 첫째, 외형적으로 비확률적인 특성을 보이는 Black-Scholes의 옵션가격결정 방정식을 명시적으로 이용하여 콜거울과 풋거울로 구성되는 거울방정식과 반사방정식을 유도한다. 둘째, 거울방정식과 반사방정식의 풀이인 옵션가격을 원상품가격, 행사가격, 무위험이자율, 그리고 잔여만기로만 설명하는 공식을 제시한다. Black-Scholes 모형에서 중요한 역할을 하는 표준편차는 본 모형에서 현시적으로 등장하지 않는다. 그 이유를 직관적으로 설명하면 Black-Scholes 기본방정식을 구성하는 2개의 표준화된 확률변수 Z_1 과 Z_2 의 방정식을 서로 대입하여 1개의 방정식으로 표현할 때 표준편차는 소거되어 사라지기 때문이다. 구체적으로 표현하면 2개의 확률변수

1) 문헌에서는 가격변동(volatility)과 표준편차(standard deviation)를 동일하게 사용하고 있다. 대표적인 예를 들면 Miller ([13], p. 9)가 동일하게 사용하고 있다. Chriss ([4], p. 98)는 명시적으로 순간표준편차(instantaneous standard deviation)라고 정의하고 있다. Hull [10]도 색인에서 동일하게 사용하고 있으며 229쪽에서는 가격변동을 순간표준편차라고 명시적으로 해석하고 있다. 그러나 Hull은 순간표준편차와 표준편차를 혼용하고 있다. 본 논문에서는 표준편차라는 용어를 택하겠다.

Z_1 과 Z_2 사이의 방정식 $Z_1^2 - Z_2^2 = 2 \ln \frac{S}{F}$ 에는 표준편차가 등장하지 않는다.²⁾ 이 방정식은 2개의 미지수(Z_1, Z_2)를 포함한다. 이 방정식에 추가하여 Z_1 과 Z_2 사이에 또 하나의 독립방정식을 찾아낸 후 2개의 연립방정식의 풀이로서 옵션가격결정을 설명하는 것이 본 논문의 핵심이다. 이 풀이에는 표준편차가 등장하지 않는다.

셋째, 본 논문의 1차 목적이 표준편차의 도움 없이 옵션가격을 설명하는 것이지만 표준편차는 브라운 운동 방정식에서 원상품의 미래가격을 추정하는데 강력한 예측력을 갖고 있음이 밝혀진 만큼(Chiras and Manaster [3]) 본 논문의 결과를 이용하여 표준편차를 구하는 공식을 별도로 제시한다.

논문은 크게 두 가지로 구성된다. 첫째, 머리말에 이어 제Ⅱ장~제Ⅲ장에서 Black-Scholes의 방정식 구조를 점검하고, 둘째, 제Ⅳ장에서 거울방정식과 반사 방정식을 유도한 후 옵션가격결정 공식을 제시한다. 마지막에 맺는 말로 끝을 대신한다.

Ⅱ. Black-Scholes 방정식 체계의 구조

1. 기본구조

논의를 효율적으로 진행하기 위하여 원래의 Black-Scholes 방정식의 구조를 다음과 같이 4개의 묶음으로 정리할 수 있다.

$$\text{묶음 1} \quad dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad (1)$$

$$-rD + rS \frac{\partial D}{\partial S} + \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} = 0, D = C, P \quad (2)$$

$$\text{묶음 2} \quad Z_1 = \frac{\ln \frac{S}{F} + \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad (3)$$

2) 변수의 정의는 본문의 식 (9)를 참조할 수 있다.

$$Z_2 = \frac{\ln \frac{S}{F} - \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad (4)$$

$$\text{묶음 3} \quad \frac{dN_1}{dZ_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z_1^2} \quad (5)$$

$$\frac{dN_2}{dZ_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z_2^2} \quad (6)$$

$$\text{묶음 4} \quad C = N_1 S - N_2 F \quad (7)$$

$$P = (1 - N_2) F - (1 - N_1) S \quad (8)$$

묶음 1은 기본방정식이고, 묶음 2는 확률변수의 정의이고, 묶음 3은 표준정규 분포함수이며, 묶음 4는 옵션가격결정식이다. 각 묶음은 2개의 방정식으로 구성되어 있다. 식 (1)은 원상품의 가격 S 의 기하 브라운 운동을 나타내는 식인데 μ 는 S 의 평균수익률이고, σ 는 표준편차이며, dW 는 위너과정이다. 식 (2)는 파생상품가격 D 결정의 확률미분방정식이며 여기서 r 은 무위험이자율이다. 식 (3)~(4)는 확률변수 Z_i ($i=1,2$)의 정의식인데 여기서 $F = Ke^{-r(T-t)}$ 로서 잔여만기 $T-t$ 기간을 감안한 행사가격 K 의 현재가치이다. 식 (5)~(6)은 확률변수 Z_i ($i=1,2$)의 표준정규분포식이다. 여기서 N_i ($i=1,2$)는 누적확률을 가리키는데 이 때문에 문헌에서는 식 (5)~(6) 대신 누적표준정규분포로 표현되는 것이 보통이지만 동일한 내용이다. 식 (5)~(6)은 확률변수 Z_1 과 Z_2 를 각각 누적확률 N_1 과 N_2 로 전환시키는 역할을 하므로 변수전환의 매개수단으로 활용할 수 있다. 식 (7)은 콜옵션 C 의 가격방정식이고 식 (8)은 풋옵션 P 의 가격방정식이다. 식 (7)~(8)에서 재정(no-arbitrage)조건이 확인된다. 식 (1)~(8)에서 μ , σ , r , T 는 상수이고 나머지는 변수로서 시간 t 의 함수이다. 부호의 절약상 해당변수에 시간을 나타내는 하첨자 t 를 생략하였다. 옵션가격결정식 (7)~(8)은 일차선형으로 표현되어 있는데 이 식에는 위너과정 dW 가 없고 이 식에 영향을 주는 표준편차 σ 도 상수이므로 외형적으로는 비확률적 모형의 형태를 띠고 있다.

식 (1)에서 파생상품가격 D 결정의 확률미분방정식 (2)가 유도되며 식 (3)~

(8)이 식 (2)를 만족시킨다는 것은 잘 알려진 사실이다. 따라서 모든 식들은 외형적으로 조화를 이룬다.

2. 기본구조의 특징

1) Z 공간의 직각쌍곡선

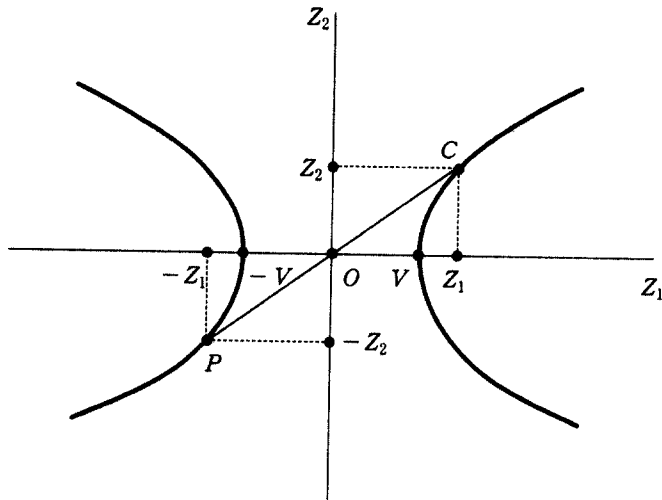
묶음 2를 구성하는 식 (3) ~ (4)를 확률변수의 좌표 (Z_1, Z_2) 상에서 하나의 방정식으로 줄여서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{묶음 2} \quad Z_1^2 - Z_2^2 = 2 \ln \frac{S}{F} \quad (9)$$

식 (9)는 특별한 관심을 끌게 한다. 묶음 2의 표준확률변수 식 (3) ~ (4)에서 Z_1 과 Z_2 를 결정하는 표준편차 σ 와 잔여만기 $T-t$ 가 식 (9)에는 소거되어 등장하지 않는다. 식 (9)는 2개의 미지수(Z_1, Z_2)를 포함하고 있다. 만일 Z_1 과 Z_2 사이에 식 (9)와 독립적인 방정식이 별도로 존재하고 이 독립방정식에 잔여만기 $T-t$ 는 포함되는데 표준편차 σ 가 포함되지 않는다면 이 2개의 연립방정식에 의해 2개의 미지수 Z_1 과 Z_2 가 풀린다. 이 풀이의 특징은 표준편차 σ 를 모르고도 풀이가 가능하다는 점이다.

식 (9)는 기하학적으로는 그림 1의 (Z_1, Z_2)의 좌표 상에서 중심(center)이 원점(origin)인 한 쌍의 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이다. 직각쌍곡선 (9)의 점근선(asymptotes)은 2개인데 원점을 통과하는 45도선과 135도선이다. 이런 의미에서 그림 1의 확률변수의 좌표를 'Z 공간'이라고 부르겠는데 표준확률변수 공간이다. $S > F$ 의 경우 점 V 는 $Z_2 = 0$ 일 때 Z_1 의 정점(vertex)이고 $S < F$ 의 경우 점 V 는 $Z_1 = 0$ 일 때 Z_2 의 정점이다. 따라서 한 쌍의 직각쌍곡선은 $S > F$ 의 경우 좌우로 나뉘고 $S < F$ 의 경우 상하로 나뉜다. 그림 1은 $S > F$ 인 경우에 식 (9)를 그리고 있는데 지면 절약상 이 경우만 다루겠다. 그림 1에

<그림 1>



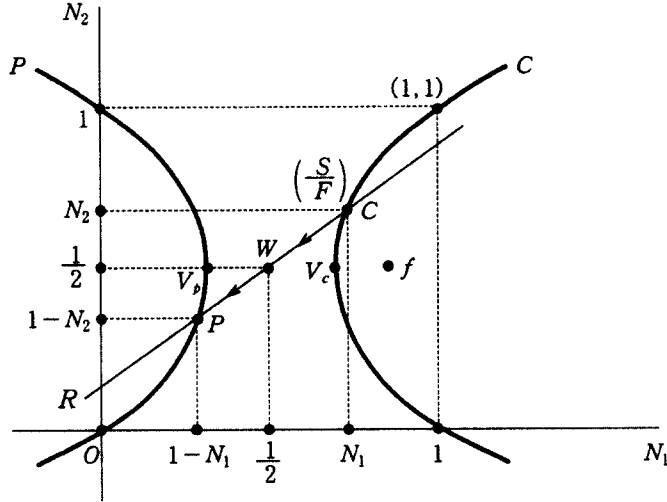
서 우측 직각쌍곡선의 임의의 한 점을 C 라 표기하자. 이 점과 원점에 대하여 대칭되는 점 P 가 좌측에 존재한다. 점 C 의 좌표는 (Z_1, Z_2) 이므로 콜업선점이고 점 P 의 좌표는 $(-Z_1, -Z_2)$ 이므로 뜻음선점이다. 콜업선점 C 와 뜻음선점 P 를 연결하는 직선은 반드시 원점을 통과한다. 그 이유는 점 C 의 좌표 (Z_1, Z_2) 를 묶음 3의 표준정규분포함수 (5)~(6)에 대입하면 누적확률의 좌표 (N_1, N_2) 로 전환되고, 점 P 의 좌표 $(-Z_1, -Z_2)$ 를 표준정규분포함수에 대입하면 누적확률의 좌표 $(1-N_1, 1-N_2)$ 로 전환되기 때문이다. 이 같은 1 대 1의 좌표전환을 이해하기 위하여 묶음 4를 살펴본다.

2) N 공간의 쌍곡선

묶음 4를 구성하는 식 (7)~(8)을 누적확률의 좌표 (N_1, N_2) 상에서 하나의 방정식으로 다음과 같이 표현할 수 있다(증명 생략).

$$\text{묶음 4} \quad \frac{\left(N_1 - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{F}{S}\right)} - \frac{\left(N_2 - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}\left(\frac{S}{F} - 1\right)} = 1 \quad (10)$$

〈그림 2〉



식 (10) 역시 식 (9)처럼 특별한 관심을 끌게 한다. 식 (10)에 누적확률 N_1 과 N_2 를 결정하는 표준편차 σ 와 잔여만기 $T-t$ 가 등장하지 않는 것은 식 (9)에 서 확률변수 Z_1 과 Z_2 를 결정하는 표준편차 σ 와 잔여만기 $T-t$ 가 등장하지 않는 것과 같은 이치이다. 따라서 2개의 누적확률 (N_1, N_2)를 포함하고 있는 식 (10)과 독립적인 방정식이 누적확률의 좌표 (N_1, N_2) 상에 별도로 존재하 고 이 독립방정식에 만기 $T-t$ 는 포함되는데 표준편차 σ 가 포함되지 않는다 면, 이 2개의 연립방정식은 표준편차를 모르고도 2개의 누적확률 (N_1, N_2)를 풀 것이다. 이 작업이 성공한다면 옵션가격결정에 표준편차가 반드시 필요하지 않다는 주장은 성립할 수 있다. 이 주장을 증명하기 위하여 식 (10)과 별도의 독립방정식을 구하는 방법을 제IV장에서 논할 것이다.

식 (10)은 기하학적으로 그림 2의 (N_1, N_2)의 누적확률 좌표 상에서 한 쌍 의 쌍곡선(hyperbola)이다. 여기서 강조해야 할 점은 식 (10)이 식 (9)처럼 직각 쌍곡선이 아니고 쌍곡선이라는 사실이다. 이 쌍곡선의 중심(center)의 좌표는 $W = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 이다. 편의상 그림 2의 좌표를 'N 공간'이라고 부르겠는데 누적

확률 공간이다. 누적확률의 특성상 $1 \geq N_1 \geq N_2 \geq 0^3$ 이므로 N 공간은 좌표 $(0, 0)$ 과 좌표 $(1, 1)$ 로 형성되는 정사각형의 내부로 제한된다. $S > F$ 의 경우 한 쌍의 쌍곡선은 좌우로 나뉜다. 우측 쌍곡선 CC 의 임의의 한 점을 C 라 표기하자. 이 점과 중심 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 에 대하여 대칭되는 점 P 가 좌측 쌍곡선 PP 에 존재한다. 점 C 의 좌표는 (N_1, N_2) 이므로 콜옵션점이고 점 P 의 좌표는 $(1-N_1, 1-N_2)$ 이므로 풋옵션점이다. 콜옵션점 C 와 풋옵션점 P 를 연결하는 직선 RR 은 반드시 중심을 통과한다.

식 (10)의 또 하나의 특이한 점은 식 (7)~(8)에서 유도된 것이지만 콜옵션가격 C 와 풋옵션가격 P 가 등장하지 않는다는 점이다. 그 이유는 식 (10)을 유도하는 과정에서 콜옵션가격 C 와 풋옵션가격 P 로 식 (7)~(8)을 서로 대입할 때 소거되어 사라지기 때문이다. 식 (10)과 콜옵션가격 C 와 풋옵션가격 P 의 관계는 식 (10)을 만족시키는 누적확률 N_1 과 N_2 가 결정되면 그림 2의 점 C 와 점 P 가 정의되어 식 (7)~(8)이 성립하는 관계이다.

Black-Scholes의 방정식 체계상 그림 1의 직각쌍곡선과 그림 2의 쌍곡선은 좌표전환으로 일치해야 한다. 그러면 묶음 3의 식 (5)~(6)을 좌표전환의 매개수 단으로 삼아 그림 2의 콜옵션점의 좌표 (N_1, N_2) 를 그림 1의 (Z_1, Z_2) 의 좌표로 전환할 수 있고, 같은 방법으로 그림 2의 풋옵션의 좌표 $(1-N_1, 1-N_2)$ 를 그림 1의 $(-Z_1, -Z_2)$ 의 좌표로 전환할 수 있다. 다시 말하면, N 공간의 중심좌표 $W = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 은 Z 공간의 원점 $(0, 0)$ 으로, N 공간의 정점 V_C 는 Z 공간의 정점 V 로, N 공간의 정점 V_P 는 Z 공간의 정점 $-V$ 로, N 공간의 점 C 는 Z 공간의 점 C 로, N 공간의 P 는 Z 공간의 P 로 전환되어야 한다. 이처럼 N 공간의 모든 점은 Z 공간의 모든 점과 1 대 1의 상응 관계를 가져야 한다. 그 같은 좌표전환이 묶음 3을 매개로 삼아 묶음 2와 묶음 4 사이에서 완벽하게 성립하는지 조사할 필요가 있다.

3) 이 조건 가운데 $N_1 \geq N_2$ 는 가정이 아니고 제IV장에서 증명된다.

3) Z 공간(묶음 2)과 N 공간(묶음 4)의 불일치

두 공간에서 두 쌍의 쌍곡선은 좌표전환을 통해 일치하는가? 즉, 묶음 2의 직각쌍곡선은 묶음 4의 쌍곡선과 동일한가? 이 질문의 해답은 Z 공간(묶음 2)의 점 C 를 N 공간(묶음 4)의 점 C 로 전환시킬 수 있는 가능성 여부에 달려 있는데 이 전환의 매개수단이 묶음 3의 표준정규분포함수이다. 그러나 해답을 정식으로 구하기 전에 직관적으로 확률변수 공간인 Z 공간의 직각쌍곡선이 어떻게 누적확률 공간인 N 공간에서는, 직각쌍곡선이 아니라, 쌍곡선으로 변신할 수 있겠는가 하는 의구심이 든다. 두 가지 방법으로 점검하겠다. 기울기의 전환과 방정식의 전환이다.

(1) 기울기 전환의 불일치

그림 1의 Z 공간에서 정점 $V = \sqrt{2 \ln \frac{S}{F}}$ 를 그대로 둔 채 점 C 의 기울기를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dZ_2}{dZ_1} = \frac{Z_1}{Z_2} \tag{11}$$

그런데 묶음 3의 식 (5)~(6)에서 다음 식이 성립한다.

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{S}{F} \frac{dZ_2}{dZ_1} \tag{12}$$

식 (12)는 Black-Scholes 방정식 체계에서 식 (3)~(8)을 확률미분방정식 (2)에 대입하여 등호를 성립시킬 때 반드시 필요한 식이다. 따라서 식 (12)는 식 (11)의 도움으로 다음과 같이 된다.

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{S}{F} \frac{Z_1}{Z_2} \tag{13}$$

식 (13)에 등장한 확률변수 Z_1 과 Z_2 를 각각 누적확률 N_1 과 N_2 로 전환하기 위하여 묶음 3의 표준정규분포함수 (5)~(6)을 적분하여 누적표준정규분포함수로 만든 후 매크로린 급수(MacLaurin series)로 확장하면 누적확률은 다음과 같이 정의된다.

$$\text{묶음 3} \quad N_1 - \frac{1}{2} = N_1'(0)Z_1 + \frac{1}{2!} N_1''(0)Z_1^2 + \dots = Z_1 B_1(Z_1) \quad (14)$$

$$N_2 - \frac{1}{2} = N_2'(0)Z_2 + \frac{1}{2!} N_2''(0)Z_2^2 + \dots = Z_2 B_2(Z_2) \quad (15)$$

묶음 3의 식 (14)~(15)는 무한급수로 표현되었으므로 그 등호는 근사 관계(approximation \approx)가 아니라 정확한 등호(equality =)이다. 식 (14)~(15)를 표준확률변수 Z_i ($i=1,2$)로 묶어 준 후 남는 항 B_i ($i=1,2$)는 Z_i ($i=1,2$)의 함수이다. 식 (14)~(15)에서 표준확률변수가 $Z_i = 0$ 일 때 누적확률은 $N_i = \frac{1}{2}$ 이다. 묶음 3의 무한급수 식 (14)~(15)를 묶음 2의 결과인 식 (13)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\text{묶음 2} \quad \frac{dN_2}{dN_1} = \frac{S}{F} \frac{2N_1-1}{2N_2-1} \frac{B_2(Z_2)}{B_1(Z_1)} \quad B_1(Z_1) \neq B_2(Z_2) \quad (16)$$

식 (16)은 표준확률변수 공간인 그림 1의 Z 공간(묶음 2)에서 점 C 의 기울기의 식 (11)을 묶음 3의 도움으로 누적확률 공간인 그림 2의 N 공간(묶음 4)으로 전환한 것이다. 그러나 그림 2의 N 공간의 점 C 에서 기울기는 묶음 4의 결과인 식 (10)에서 다음과 같이 된다.

$$\text{묶음 4} \quad \frac{dN_2}{dN_1} = \frac{S}{F} \frac{2N_1-1}{2N_2-1} \quad (17)$$

결과적으로 식 (16)과 식 (17)을 비교해 보면 묶음 2(Z 공간)가 묶음 4(N 공간)와 일치하지 않는다는 사실을 알게 된다.

(2) 방정식 전환의 불일치

이상에서 묶음 2와 묶음 4의 불일치 현상을 기울기의 전환으로 설명하였는데 방정식의 전환으로 설명하여도 불일치가 성립하는 것을 확인할 수 있다. Z 공간의 직각쌍곡선 (9)를 N 공간의 쌍곡선 (10)으로 전환하기 위하여 $S > F$ 인 경우에 다음을 정의한다.

$$\begin{aligned} \ln \frac{S}{F} &= 2 \left[\frac{\frac{S}{F}-1}{\frac{S}{F}+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{S}{F}-1}{\frac{S}{F}+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\frac{S}{F}-1}{\frac{S}{F}+1} \right)^5 + \dots \right] \\ &= \left[\frac{S}{F} - 1 \right] Y \left(\frac{S}{F} \right) > 0 \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18) 역시 무한급수로서 근사 관계가 아니라 정확한 등호이다. 식 (18)에서 변수 $\left[\frac{S}{F} - 1 \right]$ 을 끌어 낸 후 남는 항 Y 는 $\frac{S}{F}$ 의 함수이다. 식 (18)을 식 (9)에 대입하여 정리하면 Z 공간의 직각쌍곡선 (9)는 다음과 같이 된다.

$$\text{묶음 2} \quad \frac{\left(Z_1 \sqrt{\frac{1}{8Y} \frac{F}{S}} \right)^2}{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{F}{S} \right)} - \frac{\left(Z_2 \sqrt{\frac{1}{8Y}} \right)^2}{\frac{1}{4} \left(\frac{S}{F} - 1 \right)} = 1, \quad Y = Y \left(\frac{S}{F} \right) \quad (19)$$

묶음 2(Z 공간)의 식 (19)가 묶음 4(N 공간)의 쌍곡선 (10)과 일치하려면 다음이 만족되어야 한다.

$$N_1 - \frac{1}{2} = Z_1 \sqrt{\frac{1}{8Y} \frac{F}{S}}, \quad Y = Y \left(\frac{S}{F} \right) \quad (20)$$

$$N_2 - \frac{1}{2} = Z_2 \sqrt{\frac{1}{8Y}}, \quad Y = Y \left(\frac{S}{F} \right) \quad (21)$$

그러나 식 (20)~(21)을 식 (14)~(15)와 비교할 때 $B_1(Z_1) = \sqrt{\frac{1}{8Y} \frac{F}{S}}$ 와 $B_2(Z_2) = \sqrt{\frac{1}{8Y}}$ 이 성립하여야 하는데 일정하게 주어진 $\frac{S}{F}$ 의 크기에 대하여

각각의 Z_1 과 Z_2 가 유일하게 존재한다는 보장이 없다. 식 (3)~(4)에 의하면 Z_1 과 Z_2 는 $\frac{S}{F}$ 이외에 σ 에 의해서도 좌우되기 때문이다. 따라서 식 (20)~(21)은 성립하지 않으며 식 (19)는 식 (10)과 일치하지 않는다. N 공간의 식 (10)은 쌍곡선인데 반하여, Z 공간의 직각쌍곡선 (9)는 N 공간으로 좌표전환 되어도 쌍곡선 (10)이 될 수 없고 여전히 직각쌍곡선 (19)로 머물 수밖에 없다는 것이 그 원인이다.

이번에는 거꾸로 무한급수 식 (18)을 묶음 4(N 공간)의 식 (10)에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$8Y\frac{S}{F}\left(N_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - 8Y\left(N_2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 2\ln\frac{S}{F} \quad (22)$$

이것을 묶음 2(Z 공간)의 직각쌍곡선 (9)와 비교하면 역시 식 (20)~(21)이 만족되어야만 두 묶음(두 공간)이 일치하는 것을 확인할 수 있다. 그러나 식 (20)~(21)은 성립하지 않으므로 식 (22)는 식 (9)와 일치하지 않는다. 이것 역시 N 공간의 쌍곡선은 Z 공간으로 좌표전환되어도 직각쌍곡선이 되지 못하고 여전히 쌍곡선으로 남는다는 뜻이다.

Ⅲ. Black-Scholes 방정식 체계의 수정

Black-Scholes의 방정식 체계는 외견상 모순이 없어 보인다. 기하 브라운 운동 방정식 (1)에서 확률미분방정식 (2)가 유도되며 나머지 식 (3)~(8)을 확률미분방정식 (2)에 대입하면 등호가 성립하기 때문이다. 그러나 내부적으로 묶음 2와 묶음 4 사이에 불일치가 존재함이 밝혀졌다. 따라서 문제의 해결을 위해서 외견상 일치뿐만 아니라 내부적으로도 일치하는 구조를 찾아 수정해야 한다. 수정의 목표는 Z 공간의 직각쌍곡선은 좌표전환에 의해 N 공간의 쌍곡선으로, N 공간의 쌍곡선은 좌표전환에 의해 Z 공간의 직각쌍곡선으로 전환하는 것이다.

1. 수정의 핵심

1) 위너과정과 길사노프 정리

수정의 핵심을 파악하기 위하여 원래의 브라운 운동 방정식 (1)을 다시 살펴본다.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad (1)$$

이 방정식에 의하면 원상품의 실제 가격변동은 그의 평균 μ , 표준편차 σ , 그리고 위너과정 dW 에 달려 있는데, 이 때 위너과정 dW 는 실제의 불확실성을 반영한다. 평균은 예측할 수 있는 부분에 속하므로 불일치의 원인으로 지목할 수 있는 것은 예측이 어려운 부분에 속하는 표준편차 σ 와 위너과정 dW 이다. 먼저 표준편차부터 조사한다. 그러기 위하여 다음의 위너과정의 특성에서 출발한다.

$$E(dW) = 0 \quad (23)$$

$$E(dW)^2 = dt \quad (24)$$

$$E(\mu S dW) = 0 \quad (25)$$

여기서 기대부호 E 는 t 시점의 정보(I_t)에 근거를 둔 실제확률(real probability)에 의존하여 정의된다. 즉, $E = E_t[\cdot | I_t]$ 이다. 실제 위너과정의 평균은 영이고, 분산은 하나의 단위 시간(one per unit of time)이며, 다른 독립변수(μS)와 독립이라고 가정한다. 그러나 불확실성이 배제된 위험중립(risk-neutral)의 세계에서 원상품의 실제가격변동은 무위험이자율 r 과 마팅계일 위너과정 dW^* 에 달려 있다. 그의 방정식은 다음과 같다.

$$dS = rS dt + \sigma S dW^* \quad (26)$$

이 때 마팅계일 위너과정은 다음의 특성을 갖는다.

$$E^*(dW^*) = 0 \quad (27)$$

$$E^*(dW^*)^2 = dt \quad (28)$$

$$E^*(rSdW^*) = 0 \quad (29)$$

여기서 E^* 는 마팅계일 확률(synthetic probability) 하의 기대부호로서 실제 확률(real probability) 하의 기대부호 E 와 다르다. 마팅계일 기대부호 E^* 역시 t 시점의 정보(I_t)에 근거를 두지만 마팅계일 확률에 의존한다. 즉, $E^* = E_t^*[\cdot | I_t]$ 이다. 식 (1)에서 식 (26)을 빼면

$$dW^* = \lambda dt + dW \quad (30)$$

가 되는데 이 때

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad (31)$$

이다. 식 (31)에서 λ 는 위험의 가격(price of risk)인데 μ , r , σ 가 상수이므로 위험가격도 상수이다. 이처럼 Black-Scholes의 방정식에서 위험가격은 시간 t 와 상관없이 상수라는 것이 밝혀졌다. 식 (30)은 마팅계일 위너과정과 실제 위너과정의 관계를 나타내는데 이것은 길사노프 정리(the Girsanov theorem)의 특수한 형태이다. 그러나 일반적인 길사노프 정리에서 위험가격 λ 는 고정된 상수가 아니라 시간에 따라 변화하는 정보에 적응한다(I_t -adopted). 따라서 다음과 같다.

$$dW^* = \lambda_t dt + dW \quad (32)$$

즉, 길사노프 정리는 또 하나의 브라운 운동 방정식이다. 마팅계일 위너과정의 평균은 λ_t 이고 단위시간의 평균은 $\lambda_t dt$ 이며, 표준편차는 1로서 단위시간의

분산이 $1 \cdot dt$ 이다. 이 때 평균 λ_t 는 시간 t 의 함수이다. 이것은 위험가격이 시간에 따라 변한다는 것을 뜻한다. 그렇게 되려면 μ 와 r 이 상수일 때 표준편차가 시간에 따라 변해야 한다. 즉

$$\lambda_t = \frac{\mu - r}{\sigma_t} \tag{33}$$

이므로 표준편차가 상수가 아니라 시간의 함수가 됨을 의미한다. 따라서 원래의 브라운 운동 방정식 (1)은 상수 σ 를 변수 σ_t 로 대체하여

$$dS = \mu S dt + \sigma_t S dW \tag{34}$$

로 되어야 한다. 그러나 문제는 브라운 운동 방정식 (1)이 식 (34)의 형태로 바뀌어도 불일치 문제는 그대로 남는다는 점이다. 그러므로 불일치의 원인은 표준편차의 특성에 있는 것이 아니라 위너과정의 특성에 있다고 판단된다.

2) 비례가정

길사노프 정리 (32)는 실제 위너과정을 위험중립 위너과정으로 전환시키는 관계를 나타내는데 실제 위너과정 하의 영의 평균을 위험중립 위너과정 하의 $\lambda_t dt$ 의 평균으로 이동시키지만 표준편차 dt 는 변화시키지 않고 그대로 둔다. 다시 말하면 동일한 표준편차를 가진 표준정규분포를 오른쪽으로 평균만 이동시키는 현상을 나타낸다. 따라서 식 (32)에 실제 확률 하의 기대부호 E 를 적용하면

$$E(dW^*) = \lambda_t dt \tag{35}$$

$$E(dW^*)^2 = dt \tag{36}$$

이다. 이 때 식 (36)이 성립하는 것은 실제 위너과정 dW 의 분산의 가정 (24) 때문이다. 그러나 위너과정의 단위시간의 분산이 하나의 단위시간 dt (one per

unit of time)이어야 한다는 비례가정(scaling property assumption)에 대해서는 의문을 갖는다. 이에 대한 의문을 Nielson ([15], p. 10)은 “... they (the Wiener processes) have variances that are not necessarily one per unit of time”이라고 분명하게 요약하고 있다. 닐슨이 이렇게 말하는 배경에는 일반화된 위너과정(generalized Wiener process)을 염두에 두고 있다고 여겨진다.⁴⁾ Chriss [4] 역시 “... this is an assumption, not a proven fact about stocks”라고 말하며 “... this research suggests that stocks returns do not scale as they are supposed to”라고 부정적인 견해를 나타내고 있다. 여기서 그가 근거로 삼는 문헌은 Turner and Weigel [20]과 Peters [16]이다. 비례가정에 대한 타당성은 자본자산가격모형에서 찾을 수 있다.

3) 비례가정과 자본자산가격모형

위험가격의 정의 (31)은 자본자산가격결정과 깊은 관련이 있다. 임의의 원상품가격 S 의 평균수익률 μ 는 2기간 자본자산가격모형(capital asset pricing model)에 의하면 다음과 같이 정의된다.

$$\mu - r = \beta(\mu_M - r) \quad (37)$$

여기서 μ_M 은 시장포트폴리오의 평균수익률이고, β 는 원상품 수익률과 시장 포트폴리오수익률 사이의 공분산을 시장포트폴리오 수익률의 분산으로 나누어 준 비율이므로 다음 식과 같다.

$$\beta = \frac{\rho\sigma_M}{\sigma_M^2} = \frac{\rho\sigma}{\sigma_M} \quad (38)$$

여기서 ρ 는 시장포트폴리오의 수익률과 임의의 원상품수익률 사이의 상관계수이고 σ_M 은 시장포트폴리오 수익률의 표준편차이다. 식 (37)~(38)에서 다음

4) 일반화된 위너과정의 순간분산은 반드시 1이 아니며 단위시간의 분산 역시 하나의 단위시간이 아니다(Neftci [14], p. 364).

식이 성립한다.

$$\lambda = \frac{\mu_M - r}{\sigma_M} = \frac{\mu - r}{\rho\sigma} \quad (39)$$

따라서 시장포트폴리오의 수익률이 실제 브라운 운동 방정식

$$\frac{dS_M}{S_M} = \mu_M dt + \sigma_M dW_M \quad (40)$$

과 마팅계일 브라운 운동 방정식을 따를 때 식 (39)가 성립하므로 원상품의 수익률은

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \rho\sigma dW \quad (41)$$

을 따라야만 한다. 이 경우 $\rho \neq 1$ 이 되어 식 (41)은 원래의 브라운 운동 방정식 (1)과 다르다.

4) 비례가정과 소비자본자산가격모형

그러나 식 (41)이 가리키는 바대로 임의의 원상품 수익률은 새로운 비례가정으로 새로운 브라운 운동을 따르지만 식 (40)처럼 시장포트폴리오의 수익률은 여전히 원래의 비례가정으로 원래의 브라운 운동을 따르고 있다. 이 문제는 소비자본자산가격모형(consumption capital asset pricing model)으로 해결할 수 있다. 이 모형은 다기간(multi-period) 모형이다. 2기간 자본자산가격 모형에는 다음 기의 소비와 완전한 상관관계를 갖는 시장포트폴리오가 반드시 존재하여 소비의 시제한계대체율(intertemporal marginal rate of substitution in consumption) 대신 시장포트폴리오 수익률을 기준으로 다른 여타의 수익률을 설명하는 자본자산가격 방정식 (37)이 성립할 수 있다. 그러나 다기간 모형에서는 소비와 완전한 상관관계를 갖는 시장포트폴리오 존재의 여부가 확실하지 않다. 소득의 일

부를 다른 기간의 소비로 연기할 수 있기 때문이다. 그러므로 다음 기의 소비와 밀접한 상관관계를 갖는 포트폴리오만을 면밀하게 계획하여 선택할 필요가 있는데 그의 평균수익률을 μ_c 라고 표기하자. 그러면 이 포트폴리오를 기준으로 다른 여타의 수익률을 설명할 수 있는 소비자본자산가격모형이 성립할 수 있다. 뿐만 아니라 시장포트폴리오의 수익률도 다음과 같이 이 자산의 수익률로 설명할 수 있다.

$$\mu_M - r = \frac{\beta_{Mc}}{\beta_{cc}} (\mu_c - r) \quad (42)$$

이 때

$$\frac{\beta_{Mc}}{\beta_{cc}} = \frac{\rho_{Mc} \sigma_M}{\rho_{cc} \sigma_c} \quad (43)$$

인데 σ_M 은 시장포트폴리오 수익률의 표준편차, ρ_{Mc} 는 시장포트폴리오 수익률과 소비의 시제한계대체율(intertemporal marginal rate of substitution in consumption) 사이의 상관계수, σ_c 는 선정된 포트폴리오 수익률의 표준편차, ρ_{cc} 는 선정된 포트폴리오 수익률과 소비의 시제한계대체율 사이의 상관계수이다. 식 (42)~(43)에서 $\rho_{cc} \neq 1$ 인 까닭은 소비의 시제한계대체율과 완벽하게 상관관계를 맺는 자산구성이 존재하지 않기 때문이다. 따라서 위험가격은 다음과 같이 정의된다.

$$\lambda = \frac{\mu_c - r}{\sigma_c} = \frac{\mu_M - r}{\left(\frac{\rho_{Mc}}{\rho_{cc}}\right) \sigma_M} \quad (44)$$

이것은

$$\frac{dS_M}{S_M} = \mu_M dt + \left(\frac{\rho_{Mc}}{\rho_{cc}}\right) \sigma_M dW_M \quad (45)$$

$$\frac{dS_j}{S_j} = \mu_j dt + \left(\frac{\rho_{jc}}{\rho_{cc}} \right) \sigma_j dW \quad (j=1,2,\dots,J) \quad (46)$$

를 의미한다. 원상품가격의 변동이 서로 상관관계를 가지며 변한다는 것은 잘 알려져 있는 사실이다. 식 (46)이 이 사실을 반영한다. 식 (46)에 의하면 원상품 j 의 가격변동은 선정된 포트폴리오의 가격변동 사이의 상관계수에 영향을 받는다. 따라서 모든 원상품가격은 선정된 포트폴리오가격과 상관관계를 매개로 하여 서로 상관관계를 맺고 있다. 종합적으로 소비자본자산가격모형에 의해 식 (45)~(46)은 일반적으로

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + x \sigma dW \quad (47)$$

로 표현될 수 있으며 $x \neq 1$ 을 비례변수(*scaling variable*)라 칭할 수 있다. 결론적으로 일반화된 워너과정, 자본자산가격결정, 소비자본자산가격결정 등에 의해 비례변수 x 는 상관계수와 밀접한 관계를 가지며 $x \neq 1$ 이므로 원래의 브라운 운동 방정식 (1)은 식 (47)로 수정되어야 한다.

5) 비례가정과 재정가격이론

식 (44)에 의하면 위험가격 λ 는 상관계수 ρ_{cc} 와 비례한다. 이 결과를 다음의 재정가격이론(*arbitrage pricing theory*)에 적용할 수 있다.

$$\mu - r = \sum \frac{\lambda_i}{\lambda} (\mu_i - r) \quad (48)$$

여기서 λ_i 는 상태변수 ψ_i 의 위험가격이고, μ_i 는 상태변수의 평균이다. 알려진 대로 식 (48)은 재정가격이론으로 자본자산가격모형의 일반형이므로 자본자산가격모형과 비교할 때 λ_i 는 ψ_i 사이의 상관계수 ρ_{ij} 에 비례적임을 알 수 있다. $\rho_{ij} = 0$ 이면 $\lambda_i = 0$ 이므로 $\rho_{ij} \neq 0$ 이다. 여기에 길사노프 정리를 적용하면

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sum \rho_{ij} \sigma_i dW_i \quad (49)$$

이다. Arrow-Debreu에 의하면 원상품가격 S 는 n 개의 상태변수 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ 에 달려 있으므로 각 상태변수 역시 다음의 브라운 운동을 따르게 된다.

$$\frac{d\phi_i}{\phi_i} = \mu_i dt + \rho_{ij} \sigma_i dW_i \quad (50)$$

여기서 $i = 1, \dots, n$ 이다. 이 경우 $x = \rho_{ij}$ 이다.

2. 수정된 구조

지금까지 논의에 비추어 보면 Black-Scholes 체계의 기본 방정식인 브라운 운동 방정식은 두 가지 특수성을 안고 있다. 하나는 고정 위험가격이고 또 하나는 특수 위너과정이다. 이 가운데 특수 위너과정이 불일치의 원인으로 지목되었다. 일반화된 위너과정, 자본자산가격결정, 소비자본자산가격결정, 재정가격이론 등에 의존하여 수정된 브라운 운동 방정식 (47)을 중심으로 원래의 Black-Scholes 방정식 체계를 다음과 같이 새로 구축할 수 있다.

$$\text{류름 1x} \quad dS = \mu S dt + x_i \sigma_i S dW \quad (1x)$$

$$-rD + rS \frac{\partial D}{\partial S} + \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2} x_i^2 \sigma_i^2 S^2 \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} = 0, \quad (2x)$$

$$D = C, P$$

$$\text{류름 2x} \quad Z_1 = \frac{\ln \frac{S}{F} + \frac{1}{2} x_i^2 \sigma_i^2 (T-t)}{\sigma_i \sqrt{T-t}} \quad (3x)$$

$$Z_2 = \frac{\ln \frac{S}{F} - \frac{1}{2} x_i^2 \sigma_i^2 (T-t)}{\sigma_i \sqrt{T-t}} \quad (4x)$$

묶음 3
$$\frac{dN_1}{dZ_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_1^2} \quad (5)$$

$$\frac{dN_2}{dZ_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_2^2} \quad (6)$$

묶음 4
$$C = N_1S - N_2F \quad (7)$$

$$P = (1 - N_2)F - (1 - N_1)S \quad (8)$$

묶음 3과 묶음 4는 전과 동일하지만 묶음 1x와 묶음 2x는 전과 다르다. 특히 식 (1x)가 식 (47)이고 여기에 파생상품의 정의와 이토정리를 적용하면 식 (2x)가 된다. 나머지 식 (5)~(8)과 수정된 식 (3x)~(4x)를 수정된 확률미분방정식 (2x)에 대입하면 식 (2x)의 등호가 성립한다. 수정된 체계에서 상수는 μ , r , T 이다. 전에 상수이었던 순간표준편차 σ 는 변수 σ_t 가 되었고 여기에 추가하여 새로운 비례변수 x_t 가 도입되었다. 3개의 상수(μ , r , T)를 제외한 모든 변수는 시간의 함수이지만 부호의 절약상 시간을 나타내는 하첨자 t 를 생략하였다. 다만 수정된 체계의 특징을 강조하기 위하여 x_t 와 σ_t 에만 시간의 하첨자를 나타내었다. 그러나 아래에서 다시 부호의 절약상 이 2개의 변수를 포함한 모든 변수에서 시간을 나타내는 하첨자를 생략하기로 한다.

이 수정된 체계의 특징을 단적으로 나타내는 식은 묶음 2x의 식 (3x) ~ (4x)에서 다음과 같이 주어진다.

묶음 2x
$$Z_1^2 - Z_2^2 = 2x^2 \ln \frac{S}{F} \quad (9x)$$

묶음 2x의 식 (9x)와 묶음 2의 식 (9)를 비교하면 두 식 모두 직각쌍곡선이라는 점에서 공통점을 갖고 있다. 그러나 정점의 좌표가 다르다. 식 (9)의 정점은 $\frac{S}{F}$ 만으로 구성되어 있지만 식 (9x)의 정점은 $\frac{S}{F}$ 이외에 x 가 포함되어 있다.

1) 수정된 구조의 필요충분조건

수정된 체계의 식 (1x)~(4x)를 원래 체계의 식 (1)~(4)와 비교할 때 수정된 체계에서는 상수 σ 가 변수 σ_t 로 대체된 것 이외에 새로운 변수 x_t 가 추가된 것을 발견할 수 있고 그 밖의 식 (5)~(8)이 변함이 없다는 것은 옵션가격결정 식 (7)~(8)이 Black-Scholes의 확률미분방정식 (2)의 충분조건이지 필요조건은 아니라는 사실을 의미한다. 옵션 방정식 (7)~(8)은 식 (2)를 만족시키지만 식 (2x)도 만족시키기 때문이다. 즉, 수정된 체계의 브라운 운동 방정식 (1x)에서 수정된 확률미분방정식 (2x)가 유도되며 나머지 식 (5)~(8)과 수정된 식 (3x)~(4x)를 수정된 확률미분방정식 (2x)에 대입하면 식 (2x)의 등호가 성립한다. 따라서 수정된 체계의 방정식 사이에서 일단 외견상으로는 모순이 없다. 원래의 Black-Scholes 체계의 방정식 사이에서도 외견상 모순은 없었지만 앞에서 증명한 것처럼 내부적으로 불일치 현상이 드러났다. 이제 수정된 체계에서는 내부적으로 이 불일치 현상이 사라져야 한다. 이 불일치 현상은 새로운 비례변수 x 의 역할로 사라진다. 즉, x 는 Z 공간의 직각쌍곡선을 좌표전환으로 N 공간의 쌍곡선으로 만들고, N 공간의 쌍곡선을 좌표전환으로 Z 공간의 직각쌍곡선으로 만드는 역할을 한다. 이 내용을 보도록 한다.

2) Z 공간과 N 공간의 일치

(1) 기울기 전환의 일치

우선 Z 공간의 직각쌍곡선 식 (9)가 식 (9x)로 수정되면 주어진 $\frac{S}{F}$ 하에서 점 C 의 기울기는

$$\text{목음 } 2x \quad \frac{dZ_2}{dZ_1} = \frac{Z_1}{Z_2} \left[1 - 2 \frac{x}{Z_1} \frac{dx}{dZ_1} \ln \frac{S}{F} \right] \quad (51)$$

가 된다. 목음 2의 식 (11)과 비교하면 목음 2x의 식 (51)의 괄호 속의 x 의 역할이 새롭게 보인다. $x = 1$ 로서 상수이면 괄호 속은 1이 되어 식 (51)은 식

(11)과 동일해진다. 그러나 $x \neq 1$ 이면 두 식은 다르다. 한편, 식 (3x)~(4x)에서

$$\text{묶음 } 3x \quad \frac{dN_2}{dN_1} = \left(\frac{S}{F}\right)^x \frac{dZ_2}{dZ_1} \quad (52)$$

이 주어진다. 식 (52) 역시 식 (12)와 비교할 때 x 의 역할이 강조된다. $x = 1$ 이면 식 (52)는 식 (12)와 동일해진다. 그러나 $x \neq 1$ 이면 두 식은 다르다. 이제 Z 공간의 묶음 $2x$ 의 식 (51)을 묶음 $3x$ 의 식 (52)의 도움으로 N 공간으로 좌표전환을 하면 기울기는

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{S}{F} \frac{2N_1 - 1}{2N_2 - 1} \left[1 - 2 \frac{x}{Z_1} \frac{dx}{dZ_1} \ln \frac{S}{F} \right] \left(\frac{S}{F}\right)^{x^2 - 1} \left(\frac{B_2}{B_1}\right), \quad B_1 \neq B_2 \quad (53)$$

가 된다. 이 과정에서 정의식 (14)~(15)가 사용되었다. 따라서 Z 공간에서 N 공간으로 좌표 전환된 기울기 (53)이 N 공간의 기울기 (17)과 일치하려면

$$1 = \left[1 - 2 \frac{x}{Z_1} \frac{dx}{dZ_1} \ln \frac{S}{F} \right] \left(\frac{S}{F}\right)^{x^2 - 1} \left(\frac{B_2}{B_1}\right), \quad B_1 \neq B_2 \quad (54)$$

을 만족하는 비례변수

$$x \neq 1 \quad (55)$$

가 존재하면 된다. 다시 말하면 $x = 1$ 일 때 $B_1 \neq B_2$ 이므로 두 공간의 기울기를 일치시킬 수 없지만 $x \neq 1$ 일 때에는 두 공간의 기울기를 일치시킬 수 있다. 결과적으로 $x \neq 1$ 일 때 Z 공간의 기울기는 N 공간의 기울기로 바뀌고 N 공간의 기울기는 Z 공간의 기울기로 바뀐다.

(2) 방정식 전환의 일치

두 공간에서 기울기가 일치할 때 두 공간에서 방정식도 일치한다. $x \neq 1$ 일 때 묶음 $2x$ 의 직각쌍곡선 (19)는

$$\text{류음 } 2x \quad \frac{\left(\frac{Z_1}{x} \sqrt{\frac{1}{8Y} \frac{F}{S}}\right)^2}{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{F}{S}\right)} - \frac{\left(\frac{Z_2}{x} \sqrt{\frac{1}{8Y}}\right)^2}{\frac{1}{4}\left(\frac{S}{F} - 1\right)} = 1 \quad (56)$$

로 수정된다. Z 공간의 류음 $2x$ 의 쌍곡선 (56)이 류음 $4(N$ 공간)의 쌍곡선 식 (10)과 모순 없이 일치하려면

$$N_1 - \frac{1}{2} = \frac{Z_1}{x} \sqrt{\frac{1}{8Y} \frac{F}{S}} \quad (57)$$

$$N_2 - \frac{1}{2} = \frac{Z_2}{x} \sqrt{\frac{1}{8Y}} \quad (58)$$

이 되어야 한다. 식 (57)~(58)을 식 (14)~(15)와 비교하면 $x B_1(Z_1) = \sqrt{\frac{1}{8Y} \frac{F}{S}}$ 와 $x B_2(Z_2) = \sqrt{\frac{1}{8Y}}$ 을 성립시키는 $x \neq 1$ 가 존재한다는 것을 발견할 수 있다. 결과적으로 $x \neq 1$ 일 때 x 의 도움으로 Z 공간의 직각쌍곡선은 N 공간에서 쌍곡선으로 바뀌고 N 공간의 쌍곡선은 Z 공간에서 직각쌍곡선으로 바뀐다.

3. 경제학적 의미

1) 비례변수 x 의 경제학적 의미

새로운 비례변수 x 의 존재는 앞에서 자본자산가격결정 방정식과 연결하여 설명할 수 있었고 나아가서 소비자본자산가격결정 방정식으로 일반화하였다. 그러나 약간 다르게 해석할 수도 있다. 원래의 Black-Scholes의 브라운 운동 방정식 (1)에 의하면 위너과정의 자승 dW^2 의 평균은 영이고 분산은 dt 에 비례 (proportional)한다고 알려져 있다. Merton [12]은 그 비례변수로서 원상품 수익률의 '1 단위' 표준편차(one unit of standard deviation : 1σ)를 가정하였다. 다시 말하면 식 (1)에 의한 원상품가격의 변동률은 예측할 수 있는 부분과 예측할 수 없는 부분으로 구성되어 있는데 예측할 수 있는 부분은 평균 μdt 이고 예측

할 수 없는 부분은 '1 단위' 표준편차 1σ 에 위너과정 dW 를 곱한 것이다. 이에 대하여 수정된 브라운 운동 방정식 (1x)의 예측할 수 없는 부분은 'x 단위' 표준편차(x unit of standard deviation : $x\sigma$)에 위너과정 dW 를 곱한 것으로 해석할 수 있다. 이런 의미에서 새로운 변수 x 를 비례변수라고 부를 수 있다.

위너과정 dW 는 흔히 $\epsilon\sqrt{dt}$ 로 표현된다. 이 때 오차항 ϵ 은 영의 평균과 1의 분산으로 특징지워지는 확률분포를 갖는다고 가정한다. 따라서 원래 방정식 (1)에 의하면 가령 오차항이 1의 크기를 가질 때 원상품가격 변동률의 예측할 수 없는 부분은 1의 크기의 오차항에 원상품가격의 1단위 표준편차 (1σ)만큼 비례적으로 변동한다는 것이다. 만일 오차항이 q 의 크기를 가진다면 예측할 수 없는 부분은 q 크기의 오차항에 원상품가격의 1단위 표준편차 (1σ)만큼 비례적으로 변해야 한다. 그러나 어찌서 반드시 1단위 표준편차만 변해야 하는지에 대해서는 설명이 없다. 오차항이 확률변수라면 예측할 수 없는 부분이 원상품가격의 표준편차에 몇 단위 ($x\sigma$)만큼 비례적으로 변하는지를 결정하는 비례변수 x 도 확률변수이어야 할 것이다.

비례변수 x 를 도입하여 $x\sigma$ 만큼 변하도록 허용한 예가 없지 않은 것은 아니다. 원래의 브라운 운동 방정식 (1)은 가격변동 미소(volatility smile)에 따르는 가격변동편중(volatility skew) 현상을 설명할 수 없기 때문에 이 현상을 설명하기 위하여 Cox-Ross [5], Beckers [1], Schroeder [18]는 분산고정탄력성 모형(constant elasticity of variance model)을 제시하였는데 그것이

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \left(\frac{1}{S^\alpha}\right)\sigma dW \quad 1 \geq \alpha \geq 0 \tag{59}$$

이다. 이 때 $x = 1/S^\alpha$ 에 해당한다. 동일한 현상을 설명하기 위하여 Rubinstein [17]은 브라운 운동 방정식을 다음과 같이 수정한 일탈확산모형(displaced diffusion model)을 제시하였다.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \left(1 + \frac{\theta}{S}\right)\sigma dW \tag{60}$$

여기서 $x=1+\theta/S$ 에 해당한다. 이에 비추어서 가격변동편중 현상을 반영하기 위해서는 수정된 브라운 운동 방정식 (1x)를 사용해야 한다. 따라서 x 의 존재는 경제학적으로 두 가지 의미를 갖는다.

첫째, $1 > x > 0$ 이면 행사가격 K 와 표준편차 σ 는 음의 관계를 나타내는 가격변동편중을 의미하고, $1 < x$ 이면 행사가격 K 와 표준편차 σ 는 정의 관계를 나타내는 가격변동편중을 의미한다. 일반적으로 음의 관계가 나타나므로 $1 > x > 0$ 일 가능성이 높다.

둘째, 원래의 브라운 운동 방정식 (1)은 원상품가격의 변동률이 대수정규분포를 한다는 것을 가정하고 있는데 실제로는 그렇지 않다는 것은 잘 알려져 있는 사실이다. 수정된 브라운 운동 방정식 (1x)에 의하면 $1 > x > 0$ 일 때 변동률이 평균보다 낮은 곳에서 두터운 꼬리(heavy tail)를 갖는 분포를 형성하고 $1 < x$ 일 때 변동률이 평균보다 높은 곳에서 두터운 꼬리를 갖는 분포를 만든다. 실제현상에 부합한다.

2) 일반화된 확률미분방정식

지금까지 설명에 의하면 비례변수 $x \neq 1$ 가 반드시 필요하므로 확률미분방정식 (2)를 일반 형태로 바꿀 필요가 있다. 수정된 브라운 운동 방정식 (1x)에 파생상품의 정의와 이토정리(Ito's lemma)를 적용하면 수정된 확률미분방정식 (2x)를 얻는다. 식 (2x)의 등호의 우편의 마지막 항 앞에 $\frac{1}{2}$ 이 나타나는 것은 이토정리의 특성으로 피할 수 없다. 원래의 확률미분방정식 (2)에도 이것이 나타난다. 이것 때문에 확률미분방정식 (2)는 특수한 형태가 되었다. 그러나 확률미분방정식이 좀더 일반적인 형태를 갖추려면

$$-a_0 D + a_1 S \frac{\partial D}{\partial S} + a_2 \frac{\partial D}{\partial t} + a_3 \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} = 0 \quad (61)$$

가 되어야 한다.⁵⁾ 일반적 형태 (61)에 $a_3 = \frac{1}{2}$ 로 고정시켜 특수한 형태로 만든

5) Neftci [14], p. 282.

것이 원래 확률미분방정식 (2)이다. 그러나 비례변수 x 를 삼입하여 $a_3 = \frac{1}{2} x^2$ 으로 정의한 수정된 확률미분방정식 (2x)는 일반적인 형태이다. 이토정리의 결과인 $\frac{1}{2}$ 에도 불구하고 비례변수 x 의 존재로 a_3 는 확률변수가 될 수 있기 때문이다.

3) 수정된 표준확률변수 Z_1 과 Z_2 의 경제학적 의미

수정된 브라운 운동 방정식 (1x)에 부합하는 표준확률변수 식 (3x)~(4x)를 직관적으로 설명할 수 있다. 먼저 원상품의 가격 S 의 수익률의 순간평균은 μ 이다. 따라서 잔여만기 $T-t$ 동안의 평균수익률은 $\mu(T-t)$ 이다. 이것은 잔여만기 동안 매기 일정하게 μ 퍼센트 성장한다는 뜻이다. 그러나 일정 시점에 서 원상품의 가격은 $+(x\sigma)^2$ 만큼 오를 수도 있고 $-(x\sigma)^2$ 만큼 내려갈 수도 있다. 따라서 평균적으로는 상하로 $\frac{(x\sigma)^2}{2}$ 만큼 변할 수 있다. 변하는 방향이 내려갈지 올라갈지 모른다. 이것은 간단하게 증명된다. 일반화된 위너과정 (generalized Wiener process)⁶⁾ Y_t 는 다음과 같이 정의된다.⁷⁾

$$Y_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t) \tag{62}$$

$$S_t = S_0 e^{\pm Y_t} \tag{63}$$

그러면 수정된 브라운 운동 방정식 (1x)에 의해 다음이 성립한다.

$$dY_t = \mu dt + x\sigma dW_t \tag{64}$$

식 (61)의 부호가 +인 경우는 오르는 경우이고 -인 경우는 내리는 경우이다. 첫째, 상승(+하는 경우를 조사한다. 이 경우 식 (63)에 이토정리를 적용하면 다음 식을 얻는다.

6) 일반적인 위너과정은 정규분포를 가지며 그의 평균은 영이 아니고 그의 분산은 반드시 1일 필요가 없다(Neftci [14], p. 346).

7) Neftci [14], pp. 346~352.

$$d\ln S = \left(\mu + \frac{1}{2}x^2\sigma^2\right)dt + x\sigma dW \quad (65)$$

원상품의 순간 평균수익률이 μ 일 때 장기 평균수익률은 $\left(\mu + \frac{1}{2}x^2\sigma^2\right)(T-t)$ 가 되어 원상품 수익률은 증가한다. 즉, 평균이 $\frac{(x\sigma)^2}{2}$ 만큼 오르는 경우에는 장기적으로 볼 때 잔여만기 동안 S 의 수익률은 평균 $\left(\mu + \frac{x^2\sigma^2}{2}\right)(T-t)$ 만큼 오른다. 사실 이 크기는 수익률이 μ 이고 분산이 σ^2 일 때 만기 $T-t$ 동안의 장기 평균수익률이기도 하다. 그러나 위험중립 세계에서는 μ 대신 무위험이자율 r 을 대체하므로 장기평균은 $\left(r + \frac{x^2\sigma^2}{2}\right)(T-t)$ 가 된다. 이에 대하여 분산은 σ^2 이므로 잔여만기 동안 장기 분산은 $\sigma^2(T-t)$ 이다. 한편 만기의 원상품의 가격과 현재의 원상품의 가격비는 $\frac{S_T}{S_t}$ 이므로 수익률의 비율은 $\ln \frac{S_T}{S_t}$ 이다. 이것은 확률변수인데 여기에서 그의 평균을 제한 후 표준편차로 나누어서 표준확률변수 d_1 으로 전환하면

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_T}{S_t} - \left(r + \frac{x^2\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (66)$$

가 된다. 만기에서 $S_T \geq K$ 가 되기 위한 조건은

$$\frac{\ln \frac{S_T}{S_t} - \left(r + \frac{x^2\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \geq \frac{\ln \frac{K}{S_t} - \left(r + \frac{x^2\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (67)$$

이다. 따라서 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\ln \frac{S_t}{S_T} + \left(r + \frac{x^2\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \leq \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{x^2\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (68)$$

이것은 S_T 가 K 보다 클 누적확률 N_1

$$\Pr(S_T \geq K) = N_1(Z_1) = N_1\left[\frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{x^2 \sigma^2}{2}\right)}{\sigma \sqrt{T-t}}\right] \quad (69)$$

을 의미하는데 식 (69)의 표준확률변수 Z_1 이 바로 식 (3x)이다.

둘째, 하락(-)하는 경우에 이토정리를 식 (63)에 적용하면

$$d \ln S = -\left(\mu - \frac{1}{2} x^2 \sigma^2\right) dt - x \sigma dW \quad (70)$$

가 된다. 이 경우 원상품 평균수익률이 μ 일 때 장기 평균수익률은 $\left(\mu - \frac{1}{2} x^2 \sigma^2\right)(T-t)$ 가 되어 원상품 수익률은 감소한다. 즉, 평균이 $\frac{(x\sigma)^2}{2}$ 만큼 내리는 경우에는 장기적으로 볼 때 잔여만기 동안 S의 수익률은 평균 $\left(\mu - \frac{x^2 \sigma^2}{2}\right)(T-t)$ 만큼 내린다. 결과적으로

$$\Pr(S_T \geq K) = N_2(Z_2) = N_2\left[\frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r - \frac{x^2 \sigma^2}{2}\right)}{\sigma \sqrt{T-t}}\right] \quad (71)$$

을 얻는다. 이것이 표준확률변수의 식 (4x)의 의미이다.

IV. 거울방정식과 반사방정식

원래의 방정식 체계와 비교하면 수정된 방정식 체계에는 비례변수 x 가 추가되어 있다. 종합하면 비례변수 x 의 역할은 수학적으로는 ① 방정식 체계 내부의 정합성(일치성)을 회복시키는데 그치지 않고, 경제학적으로는 ② 원상품 사이의 상관관계를 반영하며, ③ 가격변동편중 현상을 설명하고, ④ 두터운 꼬리 현상을 나타낸다. 그럼에도 불구하고 비례변수 x 의 추가는 미지수의 숫자를 증가시키므로 수정된 Black-Scholes 방정식은 원래의 Black-Scholes 방정식처럼 풀

러지지 않는다. 즉, 표준편차 σ 가 알려져 있다고 해도 수정된 식 (3x)~(4x)는 추가적인 비례변수 $x \neq 1$ 의 존재 때문에 풀리지 않는다. 다른 방법이 필요하다. 새로운 방법을 소개하기 위하여 다음 절차가 필요하다.

1. 콜거울과 풋거울

식 (10)을 거울방정식이라고 부르고 물리 현상에 비유하여 설명하면 유익하다. 그림 2에서 $\left(\frac{S}{F}\right)$ 를 광원으로 보고 한 쌍의 쌍곡선 (10)을 마주 보는 2개의 볼록거울로 생각하면 화살표 방향으로 들어온 광선이 오른쪽의 볼록거울의 점 C에서 반사한 후 직선 RR을 따라 중심 좌표 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 을 통과하여 왼쪽의 볼록거울의 점 P를 비추는 현상으로 이해할 수 있다. 이런 의미에서 $\left(\frac{S}{F}\right)$ 를 광원, 오른쪽 볼록거울 CC를 콜거울(call mirror), 왼쪽 볼록거울 PP를 풋거울(put mirror)이라고 부르자. 그러면 콜옵션가격의 영상(C image)이 나타나는 점 C를 콜옵션점, 풋옵션가격의 영상(P image)이 나타나는 점 P를 풋옵션점이라고 부를 수 있다. 그러면 직선 RR은 2개의 영상을 만드는 빛이 반사(reflection)하여 진행되는 경로이다.

영상(C와 P)이 광원 $\left(\frac{S}{F}\right)$ 의 방향과 거울 표면의 곡률 (17)을 결정하는 (N_1, N_2) 에만 달려 있다는 이런 식의 비유가 옵션가격결정에 적절한 것은, 첫째, 옵션가격이 원상품가격 S와 할인된 행사가격 F에 의해서 좌우된다는 파생상품의 원리에 어긋나지 않고, 둘째, 콜옵션과 풋옵션의 관계가 명확하게 드러나고, 셋째, 거울방정식 (10)은 비확률적(non-stochastic)이며 결정적(deterministic)이기 때문이다. 물리적인 현상계에서 거울 세계 역시 영상의 결정이 비확률적이고, 결정적이며, 여기에 추가하여 명확(clear)하다. 이것이 거울에 대한 비유가 적절한 또 하나의 이유이다. 즉, 거울 표면의 결정성은 거울세계를 위험중립(risk-neutral)의 세계에 비유할 수 있음을 뜻한다. 마지막으로 빛이 거울과 부딪치는 현상은 빛의 입자가 공기의 입자와 부딪쳐 산광(散光)하는 브라운 운동 현상과 달리 집광(集光)의 방향이 볼록거울의 안쪽에 초점 f를 향하게 되는데

이것은 거울 표면에 빛의 반사가 상대적으로 결정적일 수 있음을 뜻한다. 그럼에도 불구하고 거울표면에서 생기는 약간의 빛의 산란은 피할 수 없는 현상이다. 즉, 빛이 거울과 부딪치는 현상은 공기의 경우와 다른 브라운 운동으로 설명할 수 있다. 그것이 식 (1x)와 식 (1)의 차이일 것이다.

2. 만기조건

거울방정식 (10)에는 1개의 식에 2개의 미지수 (N_1 , N_2)가 있으므로 이 방정식 하나만으로는 풀이가 성립하지 않는다. 풀이는 두 가지 방법에서 접근할 수 있다. 첫째, 가중치 N_1 과 N_2 를 Black-Scholes처럼 확률미분방정식의 풀이에 의존하는 방법이다. 이것이 Black-Scholes의 방정식이다. 그러나 이 방법은 앞서 설명한 대로 불일치 문제가 제기된다. 둘째, 풀이를 위해서 숨겨져 있는 추가적인 독립방정식 1개를 찾아내는 방법이다. 이것이 본 논문의 취지이며 이 방법에 의해서 문제를 풀 수 있다. 앞에서 옵션가격을 물리 현상에 비유하여 설명할 때 콜거울 CC 의 콜옵션점 C 에서 반사한 빛이 풋거울 PP 의 풋옵션점 P 까지 도달하는 빛의 직선 RR 경로가 이 추가적인 방정식이 될 수 있다. 이 빛의 경로 RR 은 반드시 좌표 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 을 통과하는 직선이 되는데 그 이유는 이 직선이 콜거울 CC 의 콜옵션점 C 와 풋거울 PP 의 풋옵션점 P 를 동시에 결정하기 때문이다. 빛의 경로의 방정식을 반사 방정식(reflection equation)이라고 부를 수 있는데 그림 2에서 직선 RR 의 방정식이다. 즉, 우리의 문제는 $\frac{S}{F}$ 가 일정할 때 거울의 위치(CC 와 PP)를 나타내는 거울방정식 (10)이 정의되었으므로 거울에 영상(C 와 P)이 나타나는 점이 결정되도록 반사경로(RR)를 가리키는 반사방정식을 찾아내는 문제이다. 반사방정식을 찾는 데의 길잡이는 만기조건(boundary condition 또는 terminal condition)이다. 그러나 그 이전에 반사방정식 RR 의 윤곽을 파악하는 데에는 거울방정식 (10)을 규정하는 다음의 점근선(asymptotes)의 식 (72)에서 도움을 얻을 수 있다.

$$N_2 - \frac{1}{2} = \pm \left(\frac{F}{S}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(N_1 - \frac{1}{2}\right) \quad (72)$$

이 점근선이 우리가 찾고자 하는 반사방정식의 범위를 정해 주는 역할을 한다. 그러므로 좌표 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 을 통과하는 수많은 직선의 기울기는 $\left(\frac{F}{S}\right)^h$ 라고 짐작할 수 있으므로 반사방정식은

$$N_2 - \frac{1}{2} = \pm \left(\frac{F}{S}\right)^h \left(N_1 - \frac{1}{2}\right) \quad (73)$$

의 형태가 될 것이다. 그러나 $S > F$ 인 경우 반사방정식 (73)은 점근선 (72)의 밖에 존재할 수 없으므로 그의 기울기의 절대값은 점근선의 기울기의 절대값보다 낮아야 한다. 또한 $S > F$ 인 경우 점근선의 기울기의 절대값은 1보다 크고 반사 방정식의 기울기의 절대값은 1보다 작아야 한다. 따라서 $h > 0 > -\frac{1}{2}$ 이다. 그러나 $S = F$ 인 경우는 반사 방정식 (73)이 음수의 기울기를 갖는 대표적인 경우가 된다. 이 특수한 경우 반사 방정식 (73)은

$$\begin{aligned} N_1 &= N_2 \\ N_1 + N_2 &= 1 \end{aligned} \quad (74)$$

이 된다. 이 결과는 $S = F$ 인 경우 거울방정식 (10)과 반사방정식 (73)은 일치한다. 물론 $S \neq F$ 인 경우에는 거울방정식 (10)과 반사방정식 (73)은 서로 다른 방정식으로 각각 독립방정식이다. 이러한 사실들은 반사방정식의 형태가 식 (73)이라는 것을 암시하는 증거이다. 나머지는 h 를 정의하는 일이다.

반사방정식을 지금처럼 추측에 의존하지 않고 다음 절에서 수학적으로 유도하기 전에 h 의 범위를 추측하기 위하여 우선 다음을 정의한다.⁸⁾

8) Neftci [14], p. 349.

$$\frac{S_T}{F_T} = \frac{S_T}{K} = \left(\frac{S_t}{F_t}\right) e^{\left(\mu - r - \frac{1}{2}x^2\sigma^2\right)(T-t)} = \left(\frac{S_t}{F_t}\right)^{h+k} \quad (75)$$

$x = 1$ 은 Black-Scholes의 확률미분방정식에서 유래된 것이지만 여기서는 일반화하여 $x \neq 1$ 이다. 이것은 일반적인 확률미분방정식 (2x)를 의미하며 다시 일반적인 브라운 운동 방정식 (1x)를 의미하기도 한다. 이 정의에 기초하여 다음이 성립한다.

$$h = 1 - k + zT\left(1 - \frac{t}{T}\right) \quad (76)$$

여기서

$$z = \frac{\mu - r - \frac{1}{2}x^2\sigma^2}{\ln \frac{S}{F}} \quad (77)$$

인데 분모 $\ln \frac{S}{F}$ 와 분자의 x 와 σ 가 시간의 함수이므로 z 역시 상수가 아니라 변수이다.

여기에 다음의 만기조건을 적용하면 반사방정식을 알 수 있는 범위가 더 좁혀질 수 있다.

$$C_T = \max(S_T - K, 0) \quad (78)$$

만기조건 (78)은 $t = T$ 일 때 성립하는데 이것은 식 (7)~(8)에서 $N_1 = N_2 = 1$ 을 의미한다. 따라서 이 조건을 반사방정식 (73)에 적용하면 우리는 최소한 h 가 식 (73)에서 $T-t$ 의 함수임을 안다. 따라서 일반적인 형태의 함수

$$h = f(T-t) \quad (79)$$

로 표현할 수 있다. 식 (79)에서 $T=t$ 일 때 $h=0$ 이 되어야 식 (73)이 만기조건 (78)에 맞추게 된다. 즉, 식 (73)에서 $N_2=N_1$ 이 되어 식 (73)은 그림 2에서 원점을 출발하는 45도선이 된다. 이 45도선은 콜거울 CC 와 좌표 $N_1=N_2=1$ 에서 만나므로 만기조건 (78)이 만족된다. 식 (79)를 임의의 시간 t_0 에 대하여 테일러 급수로 확장하면

$$h = f_0 - f_0'(t-t_0) + \frac{1}{2}f_0''(t-t_0)^2 + R_e \quad (80)$$

이다. 여기서 f_0 는 f 를 t_0 에서 평가한 상수이고, f_0' 는 f 를 시간 t 에 대하여 한번 미분한 것을 t_0 에서 평가한 상수이다. R_e 는 3차 급수 이상의 합을 가리킨다. 브라운 운동에서 시간의 2차 급수 이상은 무시할 정도로 작은 크기로 취급되므로 식 (80)은

$$h \simeq f_0 - f_0'(t-t_0) \quad (81)$$

가 된다. 만기조건 (78)에 의하여 $t=T$ 일 때 $h=0$ 이므로 식 (81)은

$$0 \simeq f_0 - f_0'(T-t_0) \quad (82)$$

이다. 식 (81)~(82)에서

$$h = cT\left(1 - \frac{t}{T}\right) \quad (83)$$

가 된다. 여기서 $c=f_0'$ 인데 상수이다. 식 (83)을 식 (76)과 비교하면 일반적으로 $c \neq \frac{\mu - r - \frac{1}{2}x^2\sigma^2}{\ln \frac{S}{F}} = z$ 이므로 $k \neq 1$ 이다. 식 (75)~(76)에서 $S > F$ 일 때

$$\begin{aligned}
 z > 0 \text{ 이면 } h > 1 - k \text{ 이고 } S_T > K \\
 z = 0 \text{ 이면 } h = 1 - k \text{ 이고 } S_T > K \\
 z < 0 \text{ 이면 } h < 1 - k \text{ 이고 } S_T > K \text{ 이거나 } S_T < K
 \end{aligned}
 \tag{84}$$

이다. 따라서 식 (83)과 식 (76)을 비교할 때 식 (83)에서

$$1 - k = yh \tag{85}$$

을 성립시키는 y 가 존재하는데 일정한 K 에 대해 S_T 의 크기에 따라 변하므로 상수가 아니라 확률변수이다. 식 (85)를 식 (83)에 대입하고, 그 결과를 다시 식 (76)에 대입하면

$$h = (cy + z)T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \tag{86}$$

로 표현할 수 있다. 일반적으로 y 와 z 는 상수가 아니므로 식 (86)과 식 (83)을 비교할 때 $cy + z = c$ 가 되어야 한다. 이것은 2개의 변수 z 와 y 사이에는 상수 c 를 매개로 함수 $z = c(1 - y)$ 가 존재함을 의미한다.

3. 비교분석

1) 거울방정식과 무차별곡선

지금까지 반사방정식 (73)을 추측에 의존하여 윤곽을 살폈으나, 비교분석에 의존하여 수학적으로 정의할 수 있다. 비교분석(comparative analysis)을 적용할 수 있는 이유는, 첫째, 거울방정식 (10)은 자산가격 $\frac{S}{F}$ 를 일정하게 고정시킬 때 (N_1, N_2)의 좌표 상의 $0 \leq N_1 \leq 1$ 과 $0 \leq N_2 \leq 1$ 의 범위에서 무차별곡선(indifference curve)이 되고,⁹⁾ 둘째, 자산가격 $\frac{S}{F}$ 도 일반적으로 하나의 상대가격이므로 이 상대가격 변화의 효과(price effect)를 Hicks [8]의 대체효과

(substitution effect)와 평행이동효과(parallel movement effect)로 분리하여 생각할 수 있기 때문이다. 그러므로 원상품가격이 S 에서 S' 로, 할인된 행사가격이 F 에서 F' 로 변한다고 생각하고 이 가격변화의 효과(price effect)에 비교분석을 적용할 수 있다.

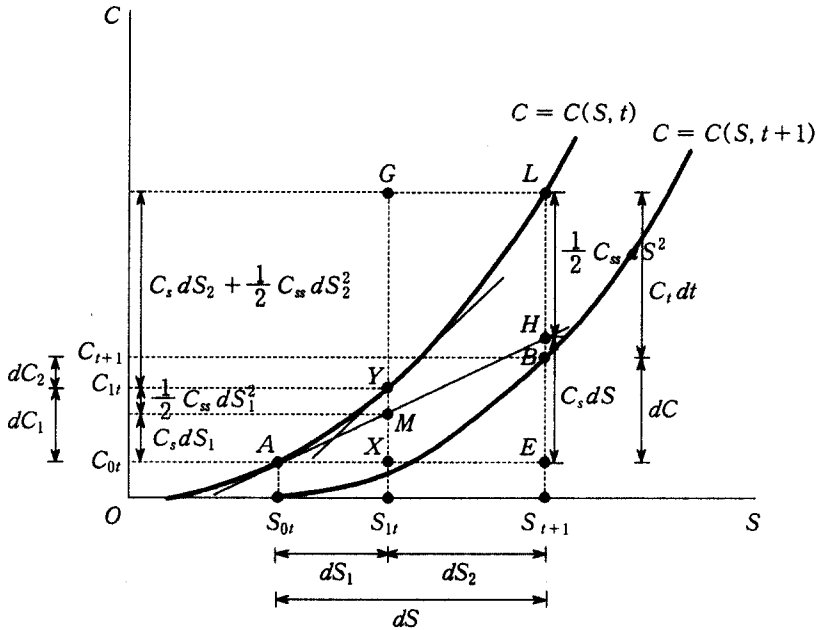
2) 확률미분방정식과 비교분석

거울방정식에 비교분석을 적용할 수 있는 또 하나의 중요한 증거는 그 방정식을 만들어낸 모(母)방정식의 하나인 콜옵션가격 방정식에 비교분석을 적용할 수 있기 때문이다. 그림 3은 콜옵션가격방정식을 기하학적으로 나타낸 것인데 비교분석이므로 2개의 곡선이 필요하다. 콜옵션가격 C 는 원상품가격 S 와 시간 t 의 함수이므로 시간 t 의 곡선은 왼쪽에 $C=C(S, t)$ 이고, 시간 $t+1$ 의 곡선은 오른쪽에 $C=C(S, t+1)$ 이다. 점 A 는 원상품의 가격이 시간 t 에서 S_{or} 일 때 콜옵션의 가격이 C_{or} 가 되는 관계를 정의하는 점이다. 점 B 는 시간 $t+1$ 에서 원상품의 가격이 S_{t+1} 일 때 콜옵션의 가격이 C_{t+1} 이 되는 관계를 정의한 점이다. 콜옵션가격이 이처럼 변하는 과정은 대수적으로는 이토과정의 도움으로

$$dC = C_S dS + \frac{1}{2} C_{SS} dS^2 + C_t dt \quad (87)$$

- 9) 범위가 $0 \leq N_1 \leq 1, 0 \leq N_2 \leq 1$ 을 넘어서면 무차별곡선의 정의에 어긋난다. 그러나 범위 $0 \leq N_1 \leq 1, 0 \leq N_2 \leq 1$ 에서는 일정한 크기의 S/F 에 대해서 서로 다른 무차별곡선이 성립한다. 좌표 $(N_1=1, N_2=1), (N_1=1, N_2=0), (N_1=0, N_2=1), (N_1=0, N_2=0)$ 에서는 모든 크기의 S/F 에 대해서 거울방정식이 성립하므로 서로 다른 무차별곡선이 이들 좌표에서 모여 접치지만 교차하지 않는다. 무차별곡선의 정의에 어긋나지 않는다. 기하학적으로 설명하면 그림 2의 범위 $0 \leq N_1 \leq 1, 0 \leq N_2 \leq 1$ 에서 3개의 무차별곡선을 3개의 볼록 계단으로 생각하면 된다. 계단의 높이는 서로 다른 크기의 S/F 이다. 계단의 위치가 중심의 좌표 $(1/2, 1/2)$ 에 가까울수록 계단의 높이는 낮고 멀수록 계단의 높이는 높다. $0 < N_1 < 1, 0 < N_2 < 1$ 에서는 계단의 높이가 다르고 계단은 접치지 않는다. 그러나 $(N_1=1, N_2=1), (N_1=1, N_2=0), (N_1=0, N_2=1), (N_1=0, N_2=0)$ 에서는 높이가 서로 다른 3개의 계단의 모서리(edge)가 만나며 접친다.

<그림 3>



이다. 그림 3에서 점 A에 접하는 접선을 추가하면 선분 EH는 $C_s dS$ 를, 선분 HL은 $\frac{1}{2} C_{ss} dS^2$ 을, 선분 BL은 $C_t dt < 0$ 를 나타낸다. 이 때 선분 EH를 dS 로 나누면 선분의 기울기 C_s 가 된다. 따라서 식 (87)은 점 A에서 점 B로 이동하는 과정은 점 A에서 점 H로, 점 H에서 점 L로, 점 L에서 점 B로 이동한 거리의 합성을 나타낸다. 특히 점 A에서 점 L의 이동은 동일 시간 t 에서 동일 곡선 상의 움직임이고, 점 L에서 점 B의 이동은 시간의 변화에 따라 하나의 곡선에서 다른 곡선으로 움직인 것이다.

이상의 확률미분방정식의 내용을 비교분석으로도 동일하게 설명할 수 있다. 2개의 곡선은 일종의 무차별곡선이다. 하나의 무차별곡선은 동일 시간으로 정의되기 때문이다. 식 (87)은 2개의 무차별곡선 사이에서 발생하는 총효과를 나타낸다. 이것을 대체효과와 평행이동효과로 분해할 수 있다. 먼저 점 Y에 접하는 접선의 기울기와 점 B에 접하는 접선의 기울기가 동일하도록 점 Y를 정의하자. 그러면 총효과(점 A에서 점 B로 이동)는 동일 무차별곡선 상의 대체효과

(점 A에서 점 Y로 이동)와 다른 무차별곡선 사이의 평행이동효과(점 Y에서 점 B로 이동)로 분해될 수 있다.

점 Y의 원상품의 가격은 S_{1t} 이다. 점 A와 점 Y 사이의 가격변화는 $dS_1 = S_{1t} - S_{0t}$ 이다. 나머지 변화는 $dS_2 = S_{2,t+1} - S_{1t}$ 이며 $dS = dS_1 + dS_2$ 이다. 이 변화로 인한 콜옵션가격의 총효과는 $dC = dC_1 + dC_2$ 로 분해된다. 즉, 식 (87)은

$$\begin{aligned} dC &= \left[C_S dS_1 + \frac{1}{2} C_{SS} dS_1^2 \right]_{dS_2=0}^{dt=0} \\ &\quad + \left[C_S dS_2 + \frac{1}{2} C_{SS} dS_2^2 + C_t dt \right]_{dS_1=0}^{dC_S=0} \\ &= dC_1 + dC_2 \end{aligned} \quad (88)$$

로 분해된다. 식 (88)의 등호의 오른쪽의 첫째 항은 동일 시간 상에서 원상품 가격이 dS_1 만큼 변할 때 콜옵션가격이 변한 부분 dC_1 이다. 둘째 항은 시간이 변하여 추가적으로 원상품가격이 dS_2 만큼 변하여 콜옵션가격이 변한 부분 dC_2 이다. 이 때 C_S 는 변하지 않는데 이것은 콜옵션곡선의 점 Y와 점 B의 기울기이다. 이렇게 보면 첫째 항은 동일 시간대의 동일 곡선 상의 이동을 나타내는 대체효과이고, 둘째 항은 기울기가 동일한 평행이동효과를 나타낸다.

식 (88)의 등호의 오른쪽의 첫째 항을 설명하기 위해 그림 3에서 선분 YX를 선분 MX와 선분 MY로 나눈다. 선분 MX는 $C_S dS_1$ 이고 선분 MY는 $\frac{1}{2} C_{SS} dS_1^2$ 이다. 이 두 선분의 합성이 첫째 항이다. 이 때 시간은 변하지 않으므로 $dt=0$ 이다. 즉, $S = S_1 + S_2$ 의 분해에 따라 $C = C_1 + C_2$ 로 분해할 때 첫째 항은 함수 $C_1 = C_1(S_1, t)$ 에 $dt=0$ 와 이토정리를 적용한 결과이다. 선분 YG는 $C_S dS_2 + \frac{1}{2} C_{SS} dS_2^2$ 이고 선분 BL은 $C_t dt < 0$ 이다. 즉, $G=L$ 이므로 점 Y에서 점 L을 거쳐 점 B까지 이동한 것이다. $C_t dt < 0$ 이므로 이 두 선분의 합성이 둘째 항이다. 이 때 점 Y와 점 B 사이에 기울기 C_S 는 변하지 않으므로 $dC_S = 0$ 이다.

둘째 항은 함수 $C_2 = C_2(S_2, t)$ 에 $dC_S = 0$ 하에서 이토정리를 적용한 것이

다. 따라서 대수적으로 첫째 항은 동일 시간에 동일 무차별곡선을 따라 움직임을 나타내고 둘째 항은 다른 시간에 다른 무차별곡선으로 이동한 것이다. 결과적으로 점 A에서 점 B로 이동한 것은 점 A에서 점 M으로 이동한 후, 점 M에서 점 Y를 거쳐 점 B로 이동한 것으로 분해할 수 있다. 중간에 점 L을 거친다. 점 A에서 점 Y로 이동한 것은 대체효과, 점 Y에서 점 L을 거쳐 점 B로 이동한 것은 동일한 기울기 C_S 를 유지하면서 움직이는 평행이동효과이다.

3) 거울방정식의 비교분석과 평행이동효과

콜옵션가격곡선에 비교분석을 적용한 결과가 확률미분방정식의 풀이와 동일하다는 것을 확인하였다. 이제 거울방정식에 비교분석을 적용하자. 비교분석의 적용을 위하여 거울방정식 (10)을 규정하는 서로 다른 크기의 $\frac{S}{F}$ 와 $\frac{\tilde{S}}{\tilde{F}}$ 가 필요한데 이 때 다음의 정의와 일치하는 실수 m 과 \tilde{n} 가 존재한다.

$$\frac{\tilde{S}}{\tilde{F}} = \left(\frac{S}{F}\right)^m = \left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}} \tag{89}$$

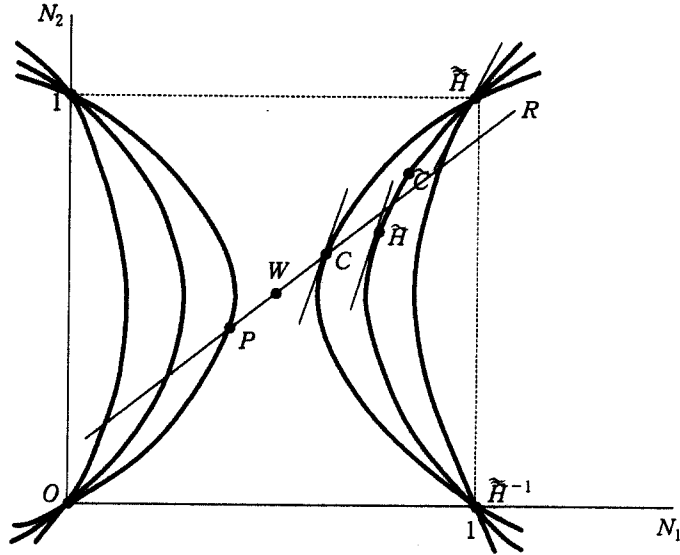
$\frac{S}{F}$ 가 브라운 운동을 따르면 임의의 실수 m 으로 정의된 $\left(\frac{S}{F}\right)^m$ 도 브라운 운동을 따르는 것으로 알려져 있다.¹⁰⁾ 따라서 $\left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}}$ 도 브라운 운동을 따르는데 이 변수가 만드는 쌍곡선(콜거울과 풋거울)은

$$\frac{\left(\tilde{N}_1 - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{\tilde{F}}{\tilde{S}}\right)\right]} - \frac{\left(\tilde{N}_2 - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\tilde{S}}{\tilde{F}}\right) - 1\right]} = 1 \tag{90}$$

이고 이 쌍곡선의 기울기는

10) Hull [10], p. 233.

<그림 4>



$$\frac{d\bar{N}_2}{d\bar{N}_1} = \frac{2\bar{N}_1 - 1}{2\bar{N}_2 - 1} \left(\frac{\bar{S}}{\bar{F}} \right) \tag{91}$$

이다. 그림 4에 세 쌍의 쌍곡선(무차별곡선)이 그려져 있다. 이들 가운데 중심 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 에 가까운 두 쌍은 쌍곡선 (10)과 쌍곡선 (90)이다. 쌍곡선 (10)은 $\frac{S}{F}$ 가 일정한 무차별곡선(indifference curve)이고 쌍곡선 (90)은 $\frac{\bar{S}}{\bar{F}}$ 가 일정한 무차별곡선이다. 비교분석을 위하여 경제가 무차별곡선 (90) 상의 \bar{C} 점에 있었는데 다음에 무차별곡선 (10) 상의 점 C 로 이동한다고 생각하자. 이 변화는 2개의 과정으로 분리할 수 있다. 좌표 \bar{C} 에서 동일 무차별곡선(쌍곡선 (90))을 따라 \bar{H} 점까지 대체효과에 의하여 움직이고 다시 \bar{H} 점에서 다른 무차별곡선(쌍곡선 (10))의 점 C 까지 평행이동효과에 의해 움직인다. 이 가운데 무차별곡선 (90)의 좌표 $\bar{H} = (\bar{N}_1, \bar{N}_2)$ 에서 무차별곡선 (10)의 좌표 $C = (N_1, N_2)$ 까지 평행이동할 때 정의에 의하여 두 점 \bar{H} 와 C 에서 두 무차별곡선의 기울기는 변하지 않으므로 (17)과 (91)에서 평행이동 조건

$$\frac{2N_1-1}{2N_2-1} \left(\frac{S}{F}\right) = \frac{2\tilde{N}_1-1}{2\tilde{N}_2-1} \left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}} \cong 0 \quad (92)$$

이 성립한다. 이 과정상에서 식 (89)가 사용되었다. 좌표 $C = (N_1, N_2)$ 의 위치에 따라 마지막의 부호가 결정된다. 즉, 좌표 C 가 정점 V_C 밑에 있으면 기울기는 음수이고 정점 위에 있으면 양수이다.

여기에 추가하여 그림 4의 세 번째 쌍곡선(무차별곡선)을 생각하자. 이 쌍곡선은 중심 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 에서 가장 멀리 떨어져 있다. 그 식은 다음과 같다.

$$\frac{\left(\tilde{N}_1 - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{\tilde{F}}{\tilde{S}}\right)\right]} - \frac{\left(\tilde{N}_2 - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\tilde{S}}{\tilde{F}}\right) - 1\right]} = 1 \quad (93)$$

이 쌍곡선은 $\frac{\tilde{S}}{\tilde{F}}$ 가 일정한 무차별곡선인데 그의 기울기는

$$\frac{d\tilde{N}_2}{d\tilde{N}_1} = \frac{2\tilde{N}_1-1}{2\tilde{N}_2-1} \left(\frac{\tilde{S}}{\tilde{F}}\right) \quad (94)$$

이다. 이 쌍곡선의 기울기는 좌표 $\tilde{H} = (1, 1)$ 에서 $\frac{\tilde{S}}{\tilde{F}}$ 로 정의된다. 이 때 식 (89)와 유사하게

$$\frac{\tilde{S}}{\tilde{F}} = \left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}} \quad \tilde{n} \neq \tilde{n} \quad (95)$$

를 정의한다. 그리고 $\frac{S}{F} < \frac{\tilde{S}}{\tilde{F}}$ 를 설정하였다. 그러면 좌표 $\tilde{H} = (\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$ 의 기울기 (92)와 일치하는 새로운 기울기가 좌표 $\tilde{H} = (1, 1)$ 에서 $\frac{\tilde{S}}{\tilde{F}} > 0$ 로 정의되는 임의의 제3의 쌍곡선 (93)은 반드시 존재한다. 식 (94)에서 $\tilde{N}_1 = \tilde{N}_2 = 1$ 일 때 기울기가 $\frac{\tilde{S}}{\tilde{F}} > 1$ 이 됨을 확인할 수 있다. 이 때 식 (95)와

일치하는 임의의 실수 $\tilde{n} [> \tilde{n}]$ 가 존재한다. 식 (95)가 성립하는 이유는 식 (89)의 이유와 동일하다. 따라서 좌표 $\tilde{H} = (1, 1)$ 에서 쌍곡선 (93)의 기울기 (95)가 기울기 (92)의 양수와 동일하므로

$$\frac{2\tilde{N}_1-1}{2\tilde{N}_2-1}\left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}} = \frac{2\tilde{N}_1-1}{2\tilde{N}_2-1}\left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}} = +\left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}} > 0 \quad (96)$$

을 만족시킨다. 두 번째 등호에서 \tilde{H} 점의 정의 $\tilde{N}_1 = \tilde{N}_2 = 1$ 을 이용하였다. 그러나 식 (92)의 기울기가 음수인 경우에는 $S > F$ 일 때 좌표 $\tilde{H}^{-1} = (1, 0)$ 에서 쌍곡선 (93)의 기울기 (95)는

$$\frac{2\tilde{N}_1-1}{2\tilde{N}_2-1}\left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}} = \frac{2\tilde{N}_1-1}{2\tilde{N}_2-1}\left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}} = -\left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}} < 0 \quad (97)$$

이어야 한다. 두 번째 등호에서 \tilde{H}^{-1} 점의 정의 $\tilde{N}_1 = 1$ 과 $\tilde{N}_2 = 0$ 을 이용하였다. 따라서 2개의 쌍곡선 (90)과 (93) 사이에서 일반적인 평행이동 조건은 식 (96)~(97)에 의해서

$$\frac{2\tilde{N}_1-1}{2\tilde{N}_2-1}\left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}} = \frac{2\tilde{N}_1-1}{2\tilde{N}_2-1}\left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}} = \pm\left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}} \quad (98)$$

이다. 종합하면 3개의 점 C , \tilde{H} , \tilde{H}^{-1} 에서 세 쌍의 쌍곡선 (10), (90), (93)의 기울기는 동일하므로 3개의 쌍곡선 (10), (90), (93) 사이에서 평행이동 조건은 (17), (92), (98)에 의해서

$$\frac{2N_1-1}{2N_2-1}\left(\frac{S}{F}\right) = \frac{2\tilde{N}_1-1}{2\tilde{N}_2-1}\left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}} = \pm\left(\frac{S}{F}\right)^{h+\tilde{n}} \quad (99)$$

이다. 식 (99)의 첫째 항과 마지막 항 사이의 등호를 이용하면 식 (99)는

$$N_2 - \frac{1}{2} = \pm \left(\frac{F}{S}\right)^{h+\tilde{n}-1} \left(N_1 - \frac{1}{2}\right) \quad (100)$$

로 다시 표현할 수 있다. 식 (100)은 평행이동을 만족시키는데 중심 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 을 통과하는 직선이다.

4. 반사방정식

비교분석의 결과에 의해 반사방정식(reflection equation)의 존재를 증명할 수 있는데 먼저 식 (73)과 식 (83)의 도움으로 식 (100)은

$$N_2 - \frac{1}{2} = \pm \left(\frac{F}{S}\right)^{cT\left(1-\frac{1}{T}\right)} \left(N_1 - \frac{1}{2}\right) \quad (101)$$

이 되고, 이 때 동시에

$$\tilde{n} = 1 \quad (102)$$

임이 확인된다. 그러면 식 (99)의 둘째 항과 셋째 항 사이의 등호에서 다음이 성립한다.

$$\tilde{N}_2 - \frac{1}{2} = \pm \left(\frac{F}{S}\right)^{1-\tilde{n}} \left(\tilde{N}_1 - \frac{1}{2}\right) \quad (103)$$

식 (101)과 (103)은 다른 기울기를 갖는 서로 다른 2개의 반사방정식이다. 식 (101)의 cT 는 전 만기 동안 상수이므로 식 (103)에도 적용된다. 따라서 $N_1 = \tilde{N}_1$ 이고 $N_2 = \tilde{N}_2$ 일 때 식 (101)과 식 (103)을 비교하면 $cT=1$ 이고 $\tilde{n} = \frac{1}{T}$ 이다. 따라서 좌표 $\tilde{H} = (\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$ 을 통과하는 반사방정식은

$$\bar{N}_2 - \frac{1}{2} = \pm \left(\frac{F}{S}\right)^{1-\frac{f}{T}} \left(\bar{N}_1 - \frac{1}{2}\right) \quad (104)$$

이어야 한다. 같은 논리를 식 (101)에 적용하면

$$N_2 - \frac{1}{2} = \pm \left(\frac{F}{S}\right)^{1-\frac{f}{T}} \left(N_1 - \frac{1}{2}\right) \quad (105)$$

이 된다. 반사방정식은 만기비율 $\frac{f}{T}$ 에 좌우된다. 식 (105)의 뿌리는 식 (73)인데 두 식을 비교해 보면

$$h = 1 - \frac{f}{T} \quad (106)$$

로 정의된다. 최종적으로 직선 (105)가 콜옵선좌표 $C = (N_1, N_2)$ 와 풋옵선좌표 $P = (1-N_2, 1-N_1)$ 을 통과하는 반사방정식이다. $N_1 \neq \bar{N}_1$ 이고 $N_2 \neq \bar{N}_2$ 일 때에는 상수는 여전히 $cT=1$ 이지만 $n = \frac{f}{T}$ 이다. 그리고 $t \neq i$ 이다. 마지막으로 좌표 $\bar{H} = (1, 1)$ 을 통과하는 반사방정식은 (74)이다.

반사방정식 (105)는 세 점 C , \bar{H} , \bar{H} 사이에 평행이동효과를 적용한 결과인데 기하학적으로 설명하면 세 점 C , \bar{H} , \bar{H} 을 연결하는 곡선의 방정식에서 유래된 것이다. 즉, 세 점을 연결하는 평행이동효과 방정식은 식 (104)와 식 (105)와 식 (74)를 관통하는 직선이다(그림에서는 복잡성을 피하기 위해 생략함).

5. 표준편차와 반사방정식

앞에서 거울방정식 (10)에 표준편차가 나타나지 않은 이유를 제시했는데 반사방정식 (105)에도 표준편차가 등장하지 않는다. 그 이유를 다음과 같이 설명할 수 있다. 반사방정식 (105)의 뿌리는 식 (73)인데 식 (73)의 함수형태는 식

(76)에 달려 있고 이것은 다시 식 (77)에 달려 있다. 이것은 최종적으로 표준편차 σ 에 의해 좌우되어 일견 반사방정식 (105)와 무관하지 않는 듯이 보인다. 그러나 식 (76)과 식 (83)에서

$$\frac{t}{T} = \frac{kc \left(\ln \frac{S}{F} \right) - \mu + r + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2}{c \left(\ln \frac{S}{F} \right) - \mu + r + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2} \quad (107)$$

이 성립한다. 이 식에 의하면 표준편차 σ 가 변할 때 만기조건 (78)을 만족시키며 식 (107)의 만기비율 $\frac{t}{T}$ 의 분자와 분모에 모두 영향을 미치지만 결과적으로 반사방정식 (105)의 만기비율 $\frac{t}{T}$ 하나로 요약 표현된다. 즉, 표준편차가 만기비율 속에 내재되어 있어 현재화되지 않는다.

V. 유럽형 무배당 옵션가격의 결정

1. 옵션가격의 결정

거울방정식 (10)과 반사방정식 (105)가 콜옵션가격의 가중치 N_1 과 N_2 를 결정한다. 이 결정은 표준편차와 상관없다. 이것이 Black-Scholes 모형과 크게 다른 점이다. 앞에서 밝혔지만 표준편차가 등장하지 않는 것은 거울방정식 (10)과 반사방정식 (105)의 구조를 조사하면 이해할 수 있다. 먼저 거울방정식 (10)은 좌표전환으로 식 (9x)와 동일한데 식 (9x)에 표준편차가 보이지 않는 이유는 식 (9x)가 식 (3x)를 식 (4x)에 대입한 결과로서 이 대입에서 표준편차가 소거되어 등장하지 않기 때문이다. 한편, 반사방정식 (105)는 만기조건을 이용하여 유도된 식인데 만기에는 제 역할을 하지 못하는 표준편차의 특성 때문에 식 (105)에도 등장하지 않는다. 다시 말하면 거울방정식에는 표준편차가 숨겨져 있고 반사방정식에는 만기조건이 숨겨져 있다.

거울방정식 (10)은 $S > F$ ($S < F$)일 때 그림 2에서 좌우(상하)에 콜거울과 풋거울로 나누어진 한 쌍의 쌍곡선이고, 반사방정식 (105)는 중심좌표 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 을 통과하며 기울기가 1보다 작은(큰) 1개의 직선 RR 이다. 이 직선은 한 쌍의 쌍곡선 CC 및 PP 와 두 점에서 만난다. 우측(하측)의 점 C 가 콜옵션가격 결정점이고, 좌측(상측)의 점 P 가 풋옵션가격 결정점이다. 각각의 점에서 (N_1, N_2) 와 $(1-N_2, 1-N_1)$ 가 결정된다. 중심좌표 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 을 중심으로 좌표 (N_1, N_2) 는 반드시 1 또는 3 상한에, 좌표 $(1-N_2, 1-N_1)$ 은 반드시 3 또는 1 상한에 위치한다. 공식은 다음과 같다.

$$N_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \frac{F}{S}}{1 - \left(\frac{F}{S}\right)^{1+2(1-\frac{t}{T})}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (108)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left(\frac{F}{S}\right)^{(1-\frac{t}{T})} \left[\frac{1 - \frac{F}{S}}{1 - \left(\frac{F}{S}\right)^{1+2(1-\frac{t}{T})}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (109)$$

부호가 양수(음수)일 때에는 $1 > N_1 > N_2 > 0$ 이 성립하고 그 결과 $C > P$ ($C < P$)가 된다. 이 때 $\frac{\partial C}{\partial S} > 0$ 과 $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} > 0$ 이며, $\frac{\partial P}{\partial S} < 0$ 과 $\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} > 0$ 이 만족된다. 가중치 N_1 과 N_2 는 원상품가격 S , 잔여만기 $T-t$, 할인된 행사가격 F (따라서 행사가격 K , 무위험이자율 r)의 함수이다. 부호가 양수(음수)일 때 $t = T$ 이면 식 (108)~(109)에서 $N_1 = N_2 = 1$ [$M_1 = M_2 = 1$]이 되어 만기조건 $C = \max(S - K, 0)$ ($P = \max(K - S, 0)$)가 성립한다. 반대로 $T \rightarrow \infty$ 이면 $F \rightarrow 0$ 가 되고 식 (108)~(109)에서 $N_1 = 1$ 과 $N_2 = 1/2$ 가 되는데 이것은 만기조건에서 $C = S$ 가 됨을 의미한다. 만기조건이 모두 만족되어 옵션가격의 특성을 모두 지니고 있음을 확인할 수 있다. 더욱이 이 과정에서 Black-Scholes 모형에 나타난 표준편차 σ 는 숨은 변수가 되어 현시적으로 나타나지 않는다. 공식 (108)~(109)는 임의의 T 와 t 에 대해서 $C \geq 0$ 과 $P \geq 0$ 을 보장한다(증명

생략). 식 (108)~(109)를 식 (7)~(8)에 대입하면 콜옵션과 풋옵션의 가격이 결정된다. 이 모형은 식 (3x)~(4x)에 의해서 위험 중립형(risk-neutral)이다.

2. 표준편차 σ 와 비례변수 x 의 결정

식 (108)~(109)에 의해서 결정된 N_1 과 N_2 를 식 (5)~(6)에 대입하면 Z_1 과 Z_2 를 구할 수 있다. 그 결과를 다시 식 (3x)~(4x)에 대입하면 2개의 미지수인 표준편차 σ 와 비례변수 x 를 얻게 된다. 그 식은 다음과 같다.

$$\sigma_t = \frac{2 \ln \frac{S}{F}}{(Z_1 + Z_2) \sqrt{T-t}} \quad (110)$$

$$x_t = \sqrt{\frac{Z_1^2 - Z_2^2}{2 \ln \frac{S}{F}}} \quad (111)$$

식 (111)에서 $S > F$ 이면 $Z_1^2 > Z_2^2$ 이고 반대로 $S < F$ 이면 $Z_1^2 < Z_2^2$ 이므로 제공근 속은 항상 양수이다. 식 (110)~(111)을 이용하여 원상품가격을 예측할 수 있다.

VI. 맺는 말

이 논문에서 우리는 Black-Scholes의 방정식 체계 내부의 불일치 현상을 조사하고 그 불일치 현상을 교정하기 위하여 수정된 방정식 체계를 제시하였다. 수정된 체계는 원상품 가격변동의 몇 가지 특성, 즉 ① 상품 사이의 상관관계, ② 가격변동편중 현상, ③ 두터운 꼬리 현상을 반영하고 있다. 그러나 수정된 체계에서는 전통적인 방법으로 옵션가격을 구할 수 없기 때문에 새로운 방식을

고안해야만 하였다. 이 과정에서 옵션가격 형성을 반사거울에 비유하여 거울의 공식인 거울방정식을 유도하였다. 거울방정식은 무차별곡선의 특성을 갖추고 있으므로 비교분석을 적용할 수 있었고 여기에서 반사방정식을 유도할 수 있었다. 거울방정식과 반사방정식이 함께 가중치를 구하는 공식을 얻었다. 비교분석으로 구한 공식은 확률미분방정식에서 구한 방정식과 일치함을 보였다. 옵션가격은 원상품가격과 할인된 행사가격의 가중치를 감안하여 결정되므로 이렇게 하여 얻은 가중치를 대입하여 옵션가격이 결정된다. 위험중립의 모형이다. 이 모형의 최대의 특징은 옵션가격을 결정하는데 표준편차가 필요 없다는 점이다. 그러나 표준편차는 미래의 순간분산을 추정하고 원상품의 미래가격을 추정하는데 강력한 예측력을 갖고 있음이 밝혀진 만큼, 본 논문의 결과를 이용하여 표준편차를 구하는 공식을 제시하였다.

▣ 참고 문헌 ▣

1. Beckers, S., "The Constant Elasticity of Variance Model and Its Implications for Option Pricing," *Journal of Finance*, 35, 1980, pp. 661~673.
2. Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, 1973, pp. 637~654.
3. Chiras, D. P. and S. Manaster, The Information Content of Option Prices and a Test of Market Efficiency, *Journal of Financial Economics* 6, June/September 1978, pp. 213~234.
4. Chriss, N. A., *Black-Scholes and Beyond*, New York: McGraw Hill, 1997.
5. Cox, J. and S. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Process," *Journal of Financial Economics*, 3, March 1976, pp. 145~166.
6. _____ and M. Rubinstein, "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics* 7, Sep. 1979, pp. 229~263.
7. _____, Ingersoll, J. E. and S. A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53, 1985, pp. 385~407.

8. Hicks, J., *Value and Capital*, 1936.
9. Huang, C., *Foundations for Financial Economics*, New York: North-Holland, 1988.
10. Hull, J., *Futures, Options and Other Derivatives*, Fourth Edition, Prentice Hall, 2000.
11. _____ and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance* 42, no. 2, June 1987, pp. 281~300.
12. Merton, R. C., "On the Mathematics and Economics Assumptions of Continuous Models," in R. C. Merton, *Continuous-Time Finance*, New York: Blackwell, 1990, pp. 57~93.
13. Miller, M., *Merton Miler on Derivatives*, New York: Wiley, 1997.
14. Neftci, S. N., *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, 2nd edition, New York: Academic Press, 2000.
15. Nielson, L. T., *Pricing and Hedging of Derivative Securities*, Oxford: Oxford University Press, 1999.
16. Peters, E. E., *Chaos and Order in the Capital Markets*, New York: John Wiley, 1991.
17. Rubinstein, M., "Displace Diffusion Option Pricing," *Journal of Finance*, 38, March 1983, pp. 213~217.
18. Schroeder, M., "Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula," *Journal of Finance*, 44, 1989, pp. 211~219.
19. Scott, L., "Option Pricing When the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and Application," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22, no. 4, Dec. 1987, pp. 419~438.
20. Turner, A. L. and J. K. Weigel, "An Analysis of Stock Market Volatility," 1990.
21. Vasicek, O. A., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5, 1977, pp. 1777~1788.
22. Wiggins, J., "Option Values under Stochastic Volatility," *Journal of Financial Economics* 19, no. 2, Dec. 1987, pp. 351~372.