연세경제연구 제 X 권 제 1 호
Yonsei Economic Studies, Vol. X, No. 1 (March 2003)

유통속도의 부문별 분할 II

김 학 은*

본 논문은 김학은[1]의 후속이며 동시에 김학은[3]의 결과를 전혀 다른 방법으로 재확인하는 논문이다. 이 논문에서 강수량효과를 이용하여 약수량효과를 재확인한다. 그 과정에서 본원공간과 쌍대공간을 동시에 만족시키는 약확장경로를 새롭게 조명하였다.

I. 머 리 말

본 논문은 김학은[1]의 후편이다. 전편은 비교분석에 예상을 도입하여 분리를 시도하였다. 그러나 예상이 정확하게 분리의 목적에 맞게 형성되는지는 확실하지 않다. 따라서 본 후편에서는 전편의 비교분석을 여전히 이용하되 예상을 이용하지 않는다. 다만 전편에서 사용하였던 본원공간과 쌍대공간의 개념은 여전히 이용할 것이다. 예상을 사용하지 않은 분할은 김학은[3]이 완성하였다. 그 논문의 핵심은 약수량효과의 개념이었고, 약수량효과의 가능성을 증명하기 위하여 강대체효과의 불가능성을 이용하였다. 본 논문에서는 약수량효과 가능성을 김학은[3]의 각주[1]에서 언급한 대로 전혀 다른 방법으로 증명하여 동일한 결과

* 연세대학교 상경대학 경제학과, 서울특별시 서대문구 신촌동 134, 120-749.
1) 김학은[3], p. 299, 각주 6).

를 재확인하는데 이번에는 강대체효과 불가능성 대신 강수량효과의 불가능성을 이용할 것이다. 따라서 본 논문의 출발점은 김학은 [3]의 힉스 강수량효과의 불가능성이다.

Ⅱ. 힉스 강수량효과의 불가능성

김학은 [1] [3]에서 쌍대출발점 $F(q_o)$는 무차별곡선 $K(m_o)$ 상에 위치하고 쌍대중간점 $H(\hat{q})$는 '다른' 무차별곡선 $K(n)$ 상에 존재한다. 본원공간에서 '동일' 무차별곡선 $Z(c)$ 상의 출발점 $F(p_o)$에서 $H(\hat{p})$으로 이동하는 힉스의 강대체효과(Hicksian strong substitution effect)는 쌍대공간에서 '동일 무차별곡선' 상의 움직임으로 정의할 수 없고 다만 '동일 직선' 상의 이동으로 정의할 수 있을 뿐이다. 그 결과 본원공간에서 동일 무차별곡선 상에 서로 다른 두 점 사이의 대체효과의 이동은 서로 다른 접선의 기울기로 정의할 수 있지만 쌍대공간에서 동일 직선 상의 두 점 사이의 이동은 서로 다른 기울기로 정의할 수 없기 때문에 쌍대공간에서 힉스의 강대체효과의 정의가 불가능하다. 다시 말하면, 본원공간과 쌍대공간에서 동시에 힉스의 대체효과가 정의될 수 없고 따라서 힉스의 수량효과(Hicksian quantity effect)도 정의될 수 없다. 본원공간의 힉스의 대체효과와 수량효과를 쌍대공간에서 정의할 수 없다는 것은 기울기 p 및 q의 정체를 기울기 $\hat{p}$ 및 $\hat{q}$와 비교해 보면 더욱 확실해진다.

정리 1 힉스 강수량효과 불가능성

본원과 쌍대 두 공간에서 일반적으로 $a \neq c$와 $m \neq n$이고 평균유통속도 Z가 V로 변할 때 하나의 무차별곡선 상의 중간점 H에서 $Z_1 \neq Z_2$이고 '동시에' 다른 무차별곡선 상의 종착점 F에서 $V_1 \neq V_2$가 되도록 힉스의 강수량효과를 성립시키는 '동일' 기울기 $\hat{p} = p$와 $\hat{q} = q$는 양 공간에서 각각의 두 무차별곡선 상에 존재하지 않는다.

증 명 : 증명을 위해 김학은[1] [3]에서 논의하였던 방정식 가운데 경제가 본원공간에서 $\hat{p}=p$ 하의 $H[\hat{p}] \rightarrow F[p]$로, 쌍대공간에서 $\hat{q}=q$ 하의 $H^{-1}[\hat{q}] \rightarrow F^{-1}[q]$로 이동하는 강수량효과를 나타내는 독립 방정식만 선택한다. 방정식 앞에 각각의 이름도 표기하였고, 각 방정식의 기하학적 표현이 〈그림 1〉이다. 증명을 위한 연립방정식 체계 I 은 다음과 같았다.

〈연립방정식 체계 I〉

$V[a]$	$\frac{1}{V} = \frac{a}{V_1} + \frac{1-a}{V_2}$	$V[m]$	$V = mV_1 + (1-m)V_2$
$F[p]$	$\frac{a}{1-a}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \Big\vert_F = p$	$F[q]$	$\frac{m}{1-m}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 \Big\vert_{F^{-1}} = q$
$Z[c]$	$\frac{1}{Z} = \frac{c}{Z_1} + \frac{1-c}{Z_2}$	$Z[n]$	$Z = nZ_1 + (1-n)Z_2$
$H[\hat{p}]$	$\frac{c}{1-c}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 \Big\vert_H = \hat{p}$	$H[\hat{q}]$	$\frac{n}{1-n}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 \Big\vert_{H^{-1}} = \hat{q}$

식 $F(q)$와 식 $H(\hat{q})$에서 본원문제와 쌍대문제 사이에 변수 전환 관계를 나타내는 $k_1V_1 \equiv 1$, $k_2V_2 \equiv 1$, $K_1Z_1 \equiv 1$, $K_2Z_2 \equiv 1$을 이미 사용하였다. 왼쪽 네 개의 식은 본원공간의 식들이고, 오른쪽 네 개의 식은 쌍대공간의 식들이다. 연립방정식 체계 I에 다음 두 개의 힉스 강수량효과(strong quantity effect)의 정의를 추가하자.

$$\hat{p} = p, \quad \hat{q} = q \tag{1}$$

그러면 10개의 독립방정식이 주어진다. 미지수는 14개(V_1, V_2, Z_1, Z_2, m, n, p, $\hat{p}$, q, $\hat{q}$, a, c, V, Z)이다. 이 가운데 10개의 미지수를 나머지 4개의 미지수의 함수로 표현할 수 있다. 풀이는 두 가지이다.

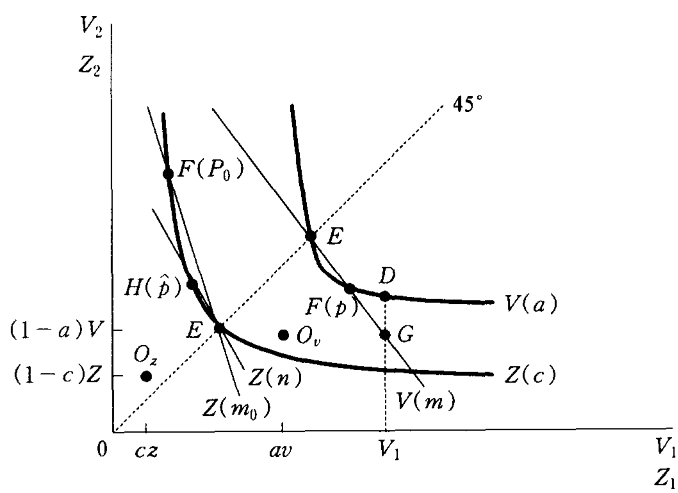
$$V_1 \neq V_2 \text{와 } Z_1 = Z_2 \tag{2}$$

$$V_1 = V_2 \text{와 } Z_1 \neq Z_2 \tag{3}$$

이것은 자명한 풀이를 배제한다고 설정한 전제 $V_1 \neq V_2$와 $Z_1 \neq Z_2$에 모순된다. <증명 끝>

<정리 1>을 다른 말로 표현하면, $p=\hat{p}$와 $q=\hat{q}$일 때 중간점 H에서 $Z_1=Z_2(Z_1 \neq Z_2)$이고 '동시에' 종착점 F에서 $V_1 \neq V_2(V_1=V_2)$이라는 뜻이다. 이에 대해서는 세 가지 설명이 가능하다. 첫째, $V_1 \neq V_2$와 $Z_1 \neq Z_2$ 하에서 $\hat{q} \neq q$와 $\hat{p}=p$이다. 경제가 본원문제의 수량효과에 의해서 같은 기울기 p를 가진 본원중간점 $H(p)$에서 본원종착점 $F(p)$로 평행 이동할 때, 쌍대문제에서는 수량효과에 의해서 다른 기울기를 가진 쌍대중간점 $H(\hat{q})$에서 쌍대종착점 $F(q)$으로 非平行 이동하는 것이다. 둘째, $V_1 \neq V_2$와 $Z_1 \neq Z_2$ 하에서 $\hat{p} \neq p$와 $\hat{q}=q$이다. 경제가 쌍대문제의 수량효과에 의해서 같은 기울기 q를 가진 쌍대중간점 $H(q)$에서 쌍대종착점 $F(q)$로 평행 이동할 때, 본원문제의 수량효과는 다른 기울기를 가진 쌍대중간점 $H(\hat{p})$에서 쌍대종착점 $F(p)$로 비평행 이동하는 것이다. 셋째, $V_1 \neq V_2$와 $Z_1 \neq Z_2$ 하에서 $\hat{p} \neq p$와 $\hat{q} \neq q$이다. 경제는 본원공간이나 쌍대공간이나 평행이동하지 못한다. 세 경우 모두 본원공간과

〈그림 1〉



쌍대공간에서 동시에 수량효과를 정의하는 것은 불가능하다. 이것이 강수량효과의 불가능 정리이다. 첫 번째와 두 번째는 대칭적인 것으로 사실상 동일한 문제이며 어느 경우이든지 본원공간의 결과와 쌍대공간의 결과가 서로 일치하지 않으므로 배제한다. 더욱이 이들은 세 번째의 특수 경우이다. 세 번째가 일반적인 것으로 이 문제를 다루어 본다.

Ⅲ. 약수량효과

본원공간과 쌍대공간을 동시에 만족시키는 힉스 수량효과의 정의가 불가능하므로 본원공간의 점 $H(\hat{p})$에서 점 $F(p)$로 이동하고 쌍대공간의 점 $H(\hat{q})$에서 $F(q)$로 이동할 때 $\hat{p} \neq p$와 $\hat{q} \neq q$이다. 그러면 본원공간에서 점 $H(\hat{p})$에서 점 $F(p)$로 이동하는 현상을 본원 약수량효과(primary weak quantity effect)라고 이름하였고, 쌍대공간에서 점 $H(\hat{q})$에서 점 $F(q)$로 이동하는 현상을 쌍대 약수량효과(dual weak quantity effect)라고 이름하였다. 아울러 점 $F(p_o)$에서 점 $H(\hat{p})$로 이동하는 현상을 본원 약대체효과(primary weak substitution effect)라고 불렀고, 점 $F(q_o)$에서 점 $H(\hat{q})$로 이동하는 현상을 쌍대 약준대체효과(dual weak substitution effect)라고 불렀다. 따라서 본원공간에서 총효과는 $p_o \neq p$와 $p_o \neq p$와 $\hat{p} \neq p$ 하에서 다음 식과 같이 분리된다.

$$\begin{array}{cccc} \text{총효과} & = & \text{약대체효과} & + \quad \text{약수량효과} \\ [F(p_o) \rightarrow F(p)] & = & [F(p_o) \rightarrow H(\hat{p})] & + [H(\hat{p}) \rightarrow F(p)] \end{array} \tag{4}$$

쌍대공간에서는 $q_o \neq q$와 $q_o \neq \hat{q}$와 $\hat{q} \neq q$ 하에서 다음 식과 같이 분리된다.

$$\begin{array}{cccc} \text{총효과} & = & \text{약대체효과} & + \quad \text{약수량효과} \\ [F(q_o) \rightarrow F(q)] & = & [F(q_o) \rightarrow H(\hat{q})] & + [H(\hat{q}) \rightarrow F(q)] \end{array} \tag{5}$$

양 공간에서 동시에 수량효과의 정의 $\hat{p}=p$와 $\hat{q}=q$가 불가능하므로 약수량효과의 정의로 대체해야 한다. 그 이유는 강수량효과의 불가능성 때문에 연립방정식 체계 I 에서 $q \neq \hat{q}$이고 $p \neq \hat{p}$이면 미지수의 수는 10개인데 독립방정식의 수는 여덟 개로써 방정식의 수가 두 개 부족하기 때문이다. $p \neq \hat{p}$를 반영하는 p와 $\hat{p}$ 사이의 약수량효과와, $q \neq \hat{q}$를 반영하는 q와 $\hat{q}$ 사이의 약수량효과를 정의하는 두 개의 숨겨진 독립 방정식(missing equations)을 찾아야 한다. 이것이 본원공간에서 본원약수량효과를 유일하게 정의하는 p와 $\hat{p}$의 함수관계인

$$p = f(\hat{p}) \tag{6}$$

와 쌍대공간에서 쌍대약수량효과를 유일하게 정의하는 q와 $\hat{q}$의 함수관계인

$$q = g(\hat{q}) \tag{7}$$

이다. 이 두 개의 독립방정식이 어디엔가 존재하는 숨겨진 방정식이다. 숨겨진 두 개의 방정식이 연립방정식 체계 I에 추가되면 독립방정식의 수와 미지수의 수가 일치하게 되므로 풀이가 가능하다.

Ⅳ. 부분 약수량효과

앞서 <정리 1>에서 연립방정식 체계 I 을 이용하여 보여준 강수량효과 불가능성의 증명에 의하면 양 공간에서 각각의 무차별곡선의 기울기를 동일하게 유지할 때 풀이 가운데 하나는 반드시 45도선에 존재하게 된다. 바꾸어 말하면 45도선에서 자명한 풀이를 갖는 무차별곡선이 한 개 존재한다는 뜻이다. <정리 1>을 거꾸로 이용하여 45도선에서 자명한 풀이를 갖는 보조적인 무차별곡선(instrumental indifference curve)을 일부러 도입할 수 있다. 그러면 본원공간에서 직선 $H(\hat{p})F(p)$의 전체 약수량효과 구간과 쌍대공간에서 직선 $H(\hat{q})F(q)$의

약수량효과를 전체 구간에서 동시에 정의하는 것이 어려우므로 보조적인 무차별곡선을 도입하여 부분적인 구간에서 약수량효과를 동시에 정의하도록 한다. 각 공간에 두 개의 보조적인 무차별곡선을 도입하면 각 공간에서 두 개의 부분수량효과가 존재한다. 첫째, 본원공간에서 무차별곡선 $Z(c)$에서 보조 무차별곡선 $X(\hat{b})$으로 이동하는 부분 약수량효과가 존재한다. 둘째, 본원공간에서 보조 무차별곡선 $W(b)$에서 무차별곡선 $V(a)$로 이동하는 부분 약수량효과가 있다.

1. 부분 약수량효과의 존재

$\hat{p}\hat{q}$ 부분수량효과 : 〈그림 2〉의 본원공간에서 기울기 $\hat{p}$를 갖으며, 한계유통속도 균등의 법칙

$$\frac{\hat{b}}{1-\hat{b}}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^2 = \hat{p} \tag{8}$$

을 만족하고, $Z \neq X$이며, $V \neq X$인 보조적인(instrumental) 무차별곡선 $X(\hat{b})$

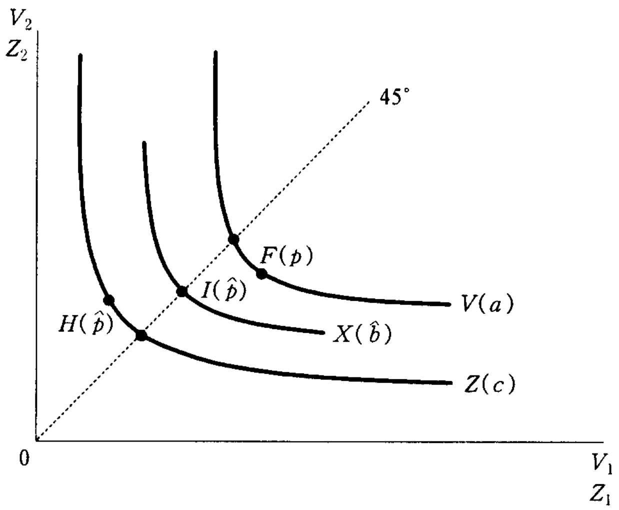
$$\frac{1}{X} = \frac{\hat{b}}{X_1} + \frac{1-\hat{b}}{X_2} \tag{9}$$

가 무차별곡선 $Z(c)$와 무차별곡선 $V(a)$ 사이(또는 밖)에 존재한다. 여기서 가중치 $\hat{b}$는 미지수이다. 식 (9)의 본원 무차별곡선 $X(\hat{b})$에 대해서 쌍대 무차별곡선 $\chi(\hat{l})$이 쌍대공간에서 반드시 존재한다.

$$\frac{1}{\chi} = \frac{\hat{l}}{\chi_1} + \frac{1-\hat{l}}{\chi_2} \tag{10}$$

여기서 가중치 $\hat{l}$은 미지수이고 $X\chi=1$, $X_1\chi_1=1$, $X_2\chi_2=1$이다. 무차별곡선 식 (10)에 대해서 기울기 $\hat{q}$를 갖는 한계유통시간 균등의 법칙 식 (11)이 쌍대공간에서 성립한다.

〈그림 2〉



$$\frac{\hat{l}}{1-\hat{l}}\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}\right)^2 = \hat{\hat{q}} \tag{11}$$

이상의 함수가 존재하면 부분 약수량효과를 정의하는데 필요한 연립방정식 체계 Ⅱ가 성립한다.

〈연립방정식 체계 Ⅱ〉

$Z(c)$	$\frac{1}{Z} = \frac{c}{Z_1} + \frac{1-c}{Z_2}$	$X(\hat{b})$	$\frac{1}{X} = \frac{\hat{b}}{X_1} + \frac{1-\hat{b}}{X_2}$
$H(\hat{p})$	$\frac{c}{1-c}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2\Big\vert_H = \hat{p}$	$I(\hat{\hat{p}})$	$\frac{\hat{b}}{1-\hat{b}}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^2\Big\vert_I = \hat{\hat{p}}$
$Z(n)$	$Z = nZ_1 + (1-n)Z_2$	$\chi(\hat{l})$	$X = \hat{l}X_1 + (1-\hat{l})X_2$
$H(\hat{q})$	$\frac{n}{1-n}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2\Big\vert_H = \hat{q}$	$I(\hat{\hat{q}})$	$\frac{\hat{l}}{1-\hat{l}}\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^2\Big\vert_I = \hat{\hat{q}}$

이상의 연립방정식 체계에 양 공간의 강수량효과를 추가하면 다음과 같다.

$$\hat{p} = \hat{\hat{p}}, \qquad \hat{q} = \hat{\hat{q}}$$

이 연립방정식 체계의 본원 풀이는 다음과 같다.

$$Z_1 = c\left[1+\left(\frac{1-c}{c}\frac{1}{\hat{p}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]Z \tag{12}$$

$$Z_2 = (1-c)\left[1+\left(\frac{c}{1-c}\hat{p}\right)^{\frac{1}{2}}\right]Z \tag{13}$$

$$X_1 = X_2 = X \tag{14}$$

$$\hat{p} = \frac{\hat{b}}{1-\hat{b}} \tag{15}$$

$$\hat{q} = \left(\frac{c}{1-c}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1-\hat{b}}{\hat{b}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

〈그림 2〉의 본원공간에서 풀이 (14)를 나타내는 좌표($X_1 = X$, $X_2 = X$)의 이름을 I라 하면, 점 I는 45도선 상의 어딘 가에 존재한다. 그 위치는 아직 알려져 있지 않다. 점 I에서 보조적인 무차별곡선 $X(\hat{b})$의 접선의 기울기는 $\hat{\hat{p}} = \hat{p}$이다. 그러므로 점 I를 $I(\hat{p})$로 표기할 수 있다. 점 $H(\hat{p})$에서 점 $I(\hat{p})$로 이동하는 것은 부분적인 평행이동이므로 $H(\hat{p})I(\hat{p})$는 부분수량효과가 된다. <정리 1>에 의해서 이 이동은 동시에 〈그림 2〉의 쌍대공간에서는 $H(\hat{q})I(\hat{q})$이다. 점 $I(\hat{q})$는 본원점 $I(\hat{p})$에 대한 쌍대점으로 쌍대공간의 45도선에 존재하며 그의 좌표는 $I(\hat{q})=(\chi, \chi)$이다.

pq **부분수량효과** : 같은 방법으로 〈그림 3〉의 본원공간에서 기울기 $\bar{p}$를 갖으며 한계유통속도 균등의 법칙

$$\frac{b}{1-b}\left(\frac{W_2}{W_1}\right)^2 = \bar{p} \tag{17}$$

을 만족하고 $V \neq W$과 $Z \neq W$인 보조적인 무차별곡선 $W(b)$

$$\frac{1}{W} = \frac{b}{W_1} + \frac{1-b}{W_2} \tag{18}$$

가 무차별곡선 $Z(c)$와 무차별곡선 $V(a)$ 사이(또는 밖)에 존재한다. 여기서 가중치 b는 미지수이다. 무차별곡선 $W(b)$에 대해서 〈그림 2〉의 쌍대공간에서 $\omega(l)$이 존재한다.

$$\frac{1}{\omega} = \frac{l}{\omega_1} + \frac{1-l}{\omega_2} \tag{19}$$

여기서 가중치 l은 미지수이고 $W\omega = 1$, $W_1\omega_1 = 1$, $W_2\omega_2 = 1$이다. 기울기 $\bar{q}$를 갖는 한계유통시간 균등의 법칙

$$\frac{l}{1-l}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \bar{q} \tag{20}$$

가 〈그림 2〉의 쌍대공간에서 성립한다. 이상의 함수가 존재하면 부분수량효과를 정의하는데 필요한 연립방정식 체계 Ⅲ은 다음과 같이 성립한다.

〈연립방정식 체계 Ⅲ〉

$V(a)$	$\frac{1}{V} = \frac{a}{V_1} + \frac{1-a}{V_2}$	$W(b)$	$\frac{1}{W} = \frac{b}{W_1} + \frac{1-b}{W_2}$
$F(p)$	$\frac{a}{1-a}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2\Big\vert_F = p$	$J(\bar{p})$	$\frac{b}{1-b}\left(\frac{W_2}{W_1}\right)^2\Big\vert_J = \bar{p}$
$V(m)$	$V = mV_1 + (1-m)V_2$	$\omega(l)$	$W = lW_1 + (1-l)W_2$
$F(q)$	$\frac{m}{1-m}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2\Big\vert_F = q$	$J(\bar{q})$	$\frac{l}{1-l}\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2\Big\vert_J = \bar{q}$

여기에 양 공간의 강수량효과를 추가한다.

$$p = \bar{p}, \qquad q = \bar{q}$$

이 연립방정식 체계의 본원 풀이는 <정리 1>에 의해 $V_1 \neq V_2$와 $W_1 = W_2$인데 다음과 같다.

$$V_1 = a\left[1+\left(\frac{1-a}{a}\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\right]V \tag{21}$$

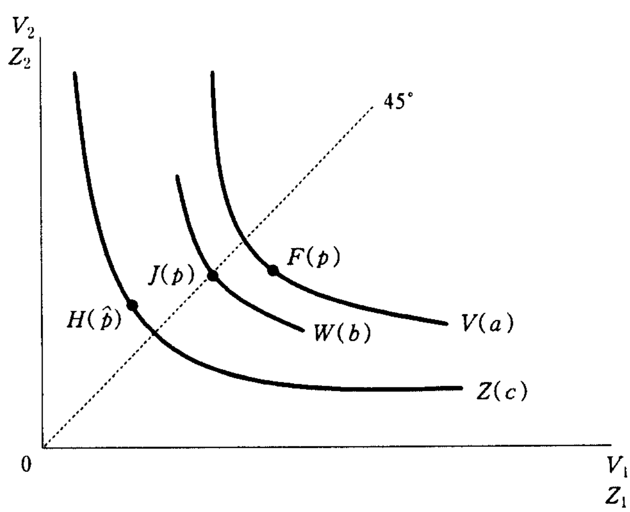
$$V_2 = (1-a)\left[1+\left(\frac{a}{1-a}p\right)^{\frac{1}{2}}\right]V \tag{22}$$

$$W_1 = W_2 = W \tag{23}$$

$$p = \frac{b}{1-b} \tag{24}$$

$$q = \left(\frac{1-b}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{25}$$

〈그림 3〉



풀이 (23)을 나타내는 좌표 ($W_1 = W$, $W_2 = W$)의 점을 J라 명명하면 점 J 는 〈그림 3〉의 45도선 상의 어딘 가에 존재한다. 정확한 위치는 아직 알려져 있지 않다. 점 J에서 무차별곡선 $W(b)$의 접선의 기울기는 $\bar{p} = p$이다. 이에 의존하여 점 J를 $J(p)$로 표기할 수 있다. 그러므로 점 $J(p)$에서 점 $F(p)$로 이동하는 것은 평행이동이므로 $J(p)F(p)$는 부분수량효과가 된다. 이 이동은 동시에 쌍대공간에서는 $J(q)F(q)$이다. 점 $J(q)$는 본원점 $J(p)$에 대한 쌍대점으로 쌍대공간의 45도선에 존재하며, 그의 좌표는 $J(q) = (\omega, \omega)$이다.

2. 부분수량효과의 방정식의 형태

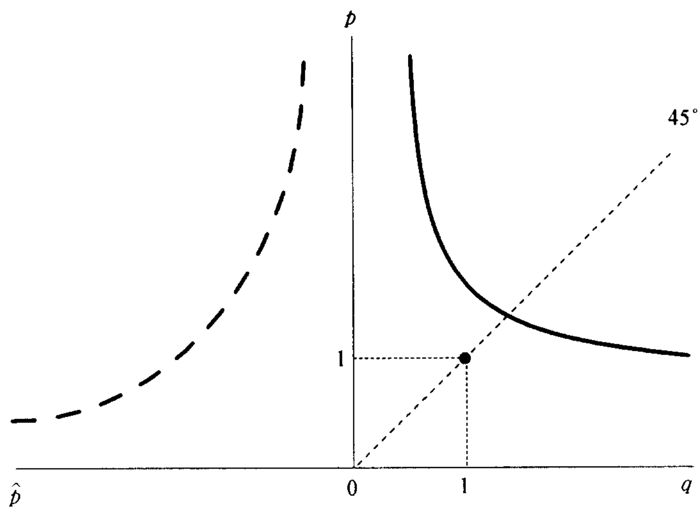
p와 q는 어떠한 관계이며 $\hat{p}$와 $\hat{q}$는 어떠한 관계일까. 이 질문은 본원공간과 쌍대공간 사이에 일정하게 존재하는 표리 관계를 묻고 있다. 즉, 부분수량효과 방정식의 형태에 관한 질문이다. 본원 부분수량효과는 유통속도의 변화를 나타내고 쌍대 부분수량효과는 유통시간의 변화를 나타낸다. 이 때 본원공간과 쌍대공간 사이의 표리관계를 나타내는 유통속도와 유통시간 사이의 관계에는 두 종류가 있다. 하나는 종착점 F의 표리관계이고 다른 하나는 중간점 H의 표리관계이다.

먼저 본원공간의 종착점 $F(p)$의 기울기 p와 쌍대공간의 종착점 $F(q)$의 기울기 q 사이의 표리관계는 연립방정식 체계 I 의 식 $F(p)$, 식 $F(q)$에서 다음과 같다.

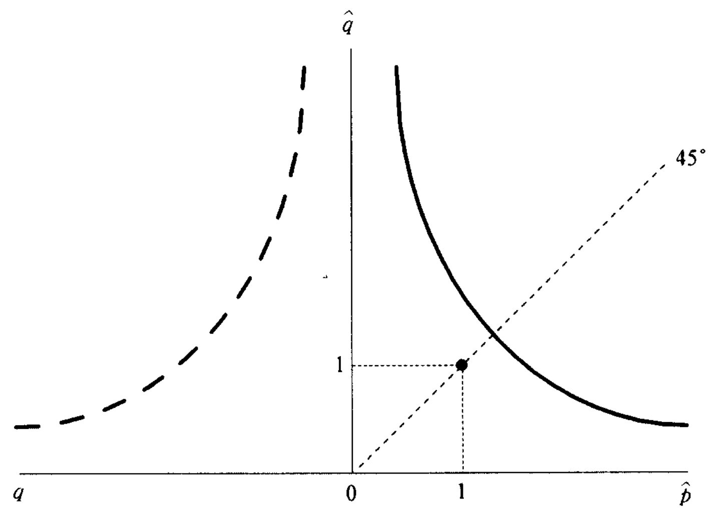
$$pq = \frac{am}{(1-a)(1-m)} \tag{26}$$

이것이 pq 부분수량효과의 정의인데 본원공간의 종착점 $F(p)$의 가격선 p와 쌍대공간의 종착점 $F(q)$의 가격선 q의 표리관계는 직각쌍곡선이다. 그 상수는 $\frac{am}{(1-a)(1-m)}$인데 〈그림 4〉에 그려져 있다. 식 (26)을 종착점 F의 pq 부분수량효과의 방정식이라고 부르자. 이 때 $a \neq m$와 $1 \neq a + m$이므로 $pq \neq 1$

〈그림 4〉



〈그림 5〉



이다. 따라서 이 직각쌍곡선은 좌표 (1,1)을 통과하지 않는다.

한편, 본원공간의 중간점 $H(\hat{p})$의 기울기 $\hat{p}$와 쌍대공간의 중간점 $H(\hat{q})$의 기울기 $\hat{q}$ 사이의 표리관계는 식 $F(\hat{p})$와 식 $F(\hat{q})$에서 다음 식과 같이 주어진다.

$$\hat{p}\,\hat{q} = \frac{cn}{(1-c)(1-n)} \tag{27}$$

이것이 $\hat{p}\hat{q}$ 부분수량효과의 정의로서 $\hat{p}$와 $\hat{q}$의 관계는 직각쌍곡선이며 그 상수는 $\frac{cn}{(1-c)(1-n)}$인데 〈그림 4〉에 그려져 있다. 이 때 $n \neq c$와 $1 \neq +$ n이므로 $\hat{p}\hat{q} \neq 1$이다. 따라서 이 직각쌍곡선은 좌표 (1, 1)을 통과하지 않는다. 식 (27)을 중간점 H의 $\hat{p}\hat{q}$ 부분수량효과의 방정식이라고 부르자.

3. 부분수량효과 방정식의 유일성

m과 n의 크기가 주어지면 두 개의 부분수량효과 방정식 (26)과 식 (27)의 위치가 정해진다. 이로부터 우리가 궁극적으로 찾고자 하는 숨겨진 약수량효과 정의식 $p = f(\hat{p})$와 $q = g(\hat{q})$의 존재를 가늠할 수 있다. 〈그림 4〉의 1 상한은 $(p,\ q)$의 좌표로서 pq 부분수량효과의 방정식 (26)이 그려져 있지만, 2 상한은 $(p,\ \hat{p})$의 좌표로서 우리가 찾고자 하는 본원약수량효과의 방정식 $p = f(\hat{p})$이 비어 있다. 마찬가지로 〈그림 5〉의 1 상한에는 $(\hat{p},\ \hat{q})$의 좌표로서 $\hat{p}\hat{q}$ 부분수량효과의 방정식 (78)이 그려져 있으나, 2 상한에는 $(q,\ \hat{q})$의 좌표로서 우리가 찾고자 하는 쌍대약수량효과의 방정식 $q = g(\hat{q})$이 비어 있다. 아직 함수의 형태를 모르기 때문이다. 다만 참고로 보면 식 (15)와 식 (24)로부터 다음 식 (28)을 얻는다.

$$p\hat{p} = \frac{b}{1-b}\,\frac{\hat{b}}{1-\hat{b}} \tag{28}$$

식 (16)과 식 (25)로부터는 식 (29)를 얻는다.

$$q\hat{q} = \frac{l}{1-l}\frac{\hat{l}}{1-\hat{l}} \tag{29}$$

그러나 식 (28)~(29)는 우리가 찾고자 하는 약수량효과를 나타내는 독립방정식 (6)~(7)이 아니다.

V. 확장경로의 불가능성

수량효과는 비교정학에서 반드시 나타나는 현상이다. 이 현상을 본원문제에서 관찰할 때와 쌍대문제에서 관찰할 때 논리적으로 결과가 반드시 일치해야 한다. 그러나 앞에서 증명한 강수량효과의 불가능성에 의하면 양측에서 결과가 일치하도록 강수량효과를 동시에 정의하는 것은 불가능하다. 강수량효과의 정의가 불가능하다면 경제가 이동하는 경로를 설명하는 확장경로(expansion path)의 정의도 불가능하다. 강수량효과가 곧 확장경로이기 때문이다. 확장경로의 정의가 불가능하다면 약수량효과에 대응하는 약확장경로(quasi-expansion path)의 정의는 가능할 것인가. 이 문제를 다루어 본다. 본원공간에서 약확장경로는 경제가 점 $H(\hat{p})$에서 점 $F(p)$로 이동하는 경로를 말하고, 쌍대공간에서 약확장경로는 점 $H(\hat{q})$에서 점 $F(q)$로 이동하는 경로를 말한다.

1. 약확장경로

원래 비교정학은 두 점 사이의 비교가 목적이고 한 점에서 다른 점으로 이동하는 경로는 취급하지 않는다(Samuelson [4]). 따라서 확장경로는 경제가 이동하는 경로라기보다 가격이 일정할 때 수량 변화에 대한 관계변수의 반응을 나타

내며, 이 때 관계변수들 사이의 함수로서 정의한다. 여기서도 이 같은 개념으로 사용한다. 앞으로 확장경로 상의 경제의 이동이라는 표현은 선상(along the curve)의 이동이나 선 사이(among the curves)의 이동의 개념이다. 이에 따라서 수량변화에 대한 부문별 유통속도의 반응과 부문별 유통속도 사이의 함수로서 해석한다.

〈그림 6〉은 다시 본원문제를 다룬다. 두 무차별곡선 $V(a)$와 $Z(c)$가 함께 그려져 있다. 두 무차별곡선은 중심도 다르고 위치도 다르다. 설명의 편의상 $\frac{V_1}{V_2} > 1 > \frac{Z_1}{Z_2}$의 경우를 그렸다. 다른 경우에도 동일한 결론이 보장된다. 경제는 무차별곡선 $Z(c)$의 본원중간점 $H(\hat{p})$에서 무차별곡선 $V(a)$의 본원종착점 $F(p)$로 비평행 이동한다. 비평행 이동의 경로인 약확장경로는 정확하게 알려져 있지 않다. 직선 $H(\hat{p})\,F(p)$이 45도선과 만나는 점을 $I(\hat{p}) = (X, X)$로 정의하자. 그러면 직선 $H(\hat{p})\,I(\hat{p})\,F(p)$가 형성된다. 이 때 직선 $H(\hat{p})\,I(\hat{p})\,F(p)$를 본원공간의 약확장경로, 줄여서 **본원 약확장경로**라고 부르면 직선 $H(\hat{p})\,I(\hat{p})\,F(p)$의 방정식이 본원 약확장경로의 함수가 된다.

무차별곡선 $V(a)$는 V_1과 V_2에 대하여 1차 동차함수이므로 그 확장경로의 함수는 식 (21)~(22)에 의하여 $V_2 = \left(\frac{1-a}{a}p\right)^{\frac{1}{2}} V_1$으로 동일 상대가격 p 하에서 직선이다. 무차별곡선 $Z(c)$ 역시 Z_1과 Z_2에 대하여 1차 동차함수이므로 그 확장경로의 함수는 식 (12)~(13)에 의해서 $Z_2 = \left(\frac{1-c}{c}\hat{p}\right)^{\frac{1}{2}} Z_1$이므로 동일 상대가격 $\hat{p}$ 하에서 직선이다. 모두 두 유통속도 사이의 함수이다.

무차별곡선 $Z(c)$의 본원중간점 $H(\hat{p})$와 무차별곡선 $V(a)$의 본원종착점 $F(p)$를 연결하는 본원 약확장경로 $H(\hat{p})\,I(\hat{p})F(p)$는 이 두 직선의 혼합으로 그 기울기가 다음과 같은 직선이다.

$$s(p\hat{p}) = \frac{V_2(p) - Z_2(\hat{p})}{V_1(p) - Z_1(\hat{p})} \tag{30}$$

식 (21)에 의하면 V와 a가 주어졌을 때 V_1은 p의 함수이므로 $V_1(p)$는 상대가격이 p일 때 V_1의 크기라는 뜻이고, 식 (12)에 의하면 Z와 c가 주어졌

을 때 Z_1은 $\hat{p}$의 함수이므로 $Z_1(\hat{p})$는 상대가격이 $\hat{p}$일 때 Z_1의 크기라는 뜻이다. 나머지도 마찬가지이다. $s(p\hat{p})$는 본원 약확장경로의 기울기가 p와 $\hat{p}$에 달렸다는 뜻인데 주어진 상대가격 p와 $\hat{p}$ 하에서 직선이다. 동일 본원 약확장경로 $H(\hat{p})\, I(\hat{p})\, F(p)$ 상의 임의의 한 점을 지나는 임의의 무차별곡선의 기울기인 상대가격 p는 고정되어 있지 않다. 강수량효과 불가능성 때문이다. $s(p\hat{p})$는 $V_1(p)$과 $Z_1(\hat{p})$에 대하여 영차 동차함수이다. $V_1(p)$와 $Z_1(\hat{p})$이 비례적으로 변하여도 본원 약확장경로의 기울기 $s(p\hat{p})$는 변하지 않는다.

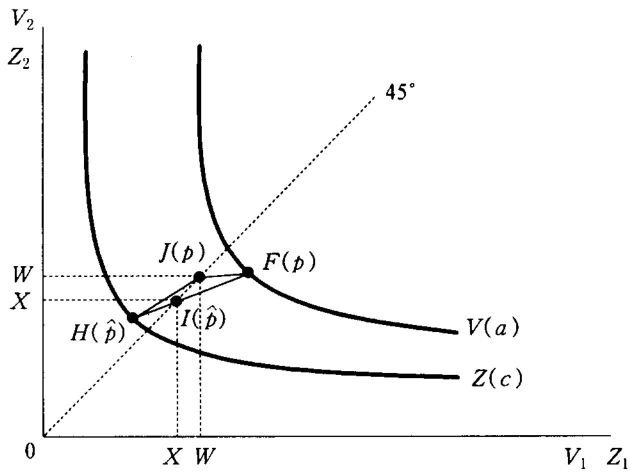
한편, 〈그림 7〉을 보면 쌍대문제로써 두 무차별곡선 $k(m)$과 $K(n)$이 함께 그려져 있다. 이들 역시 원점도 다르고 위치도 다르다. 경제는 곡선 $K(n)$의 쌍대중간점 $H(\hat{q})$에서 곡선 $k(m)$의 쌍대종착점 $F(q)$로 비평행 이동한다. 이 비평행 이동의 경로 역시 알려져 있지 않다. 임의의 한 점 $J=(\omega, \omega)$를 직선 $H(\hat{q})F(q)$와 45도선과 만나는 점으로 정의하면 비평행 이동은 〈그림 6〉에서 쌍대공간의 직선 $H(\hat{q})J(q)F(q)$을 따른다. 이 때 직선 $H(\hat{q})J(q)F(q)$를 쌍대문제의 약확장경로, 줄여서 **쌍대 약확장경로**라고 부르자.

무차별곡선 $k(m)$은 k_1과 k_2에 대하여 1차 동차함수이므로 확장경로가 $k_2=\left(\frac{1-m}{m}q\right)^{\frac{1}{2}}k_1$인 직선이다. 동일한 상대가격 q 하에서 직선이다. 무차별곡선 $K(n)$ 역시 K_1과 K_2에 대하여 1차 동차함수이므로 확장경로가 $K_2=\left(\frac{1-n}{n}\hat{q}\right)^{\frac{1}{2}}K_1$인 직선이다. 동일한 상대가격 $\hat{q}$ 하에서 직선이다. 무차별곡선 $K(n)$의 쌍대중간점 $k(m)$을 연결하는 쌍대 약확장경로 $H(\hat{q})J(q)F(q)$는 이 두 직선의 혼합으로 그 기울기가 다음과 같은 직선이다.

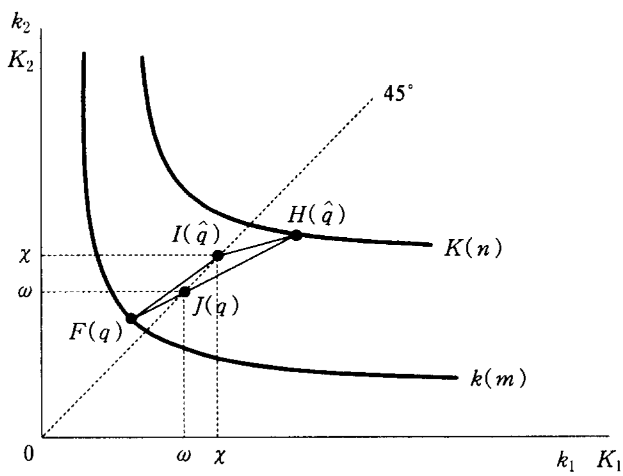
$$s(q\hat{q}) = \frac{k_2(q)-K_2(\hat{q})}{k_1(q)-K_1(\hat{q})} \tag{31}$$

여기서 $k_1(q)$는 k와 m이 주어졌을 때 k_1이 q에 달렸다는 뜻이다. 나머지도 마찬가지이다. $s(q\hat{q})$는 쌍대 약확장경로의 기울기가 q와 $\hat{q}$에 달려 있다는 뜻이다. 동일 쌍대 약확장경로 상의 임의의 한 점을 지나는 무차별곡선의

〈그림 6〉



〈그림 7〉



기울기인 상대가격 q는 고정되어 있지 않다. 강수량효과의 불가능정리 때문이다. $s(q\hat{q})$는 $k_1(q)$과 $K_1(\hat{q})$에 대하여 영차 동차함수이다. $k_1(q)$와 $K_1(\hat{q})$이 비례적으로 변하여도 쌍대 약확장경로의 기울기 $s(q\hat{q})$는 변하지 않는다.

2. 약확장경로의 중심의 이동

본원공간의 약확장경로 $H(\hat{p})I(\hat{p})F(p)$는 무차별곡선의 중심이 $O_Z = [cZ, (1-c)Z]$에서 $O_V = [aV, (1-a)V]$로 이동하기 때문에 형성된 것이다. 따라서 중심의 이동은 약확장경로의 형성과 밀접한 관계가 있다. 다음을 정의한다.

$$\Delta = \frac{(1-a)V-(1-c)Z}{aV-cZ} \tag{32}$$

식 (32)를 기하학적으로 표현하면 본원공간의 무차별곡선 $V(a)$의 중심과 무차별곡선 $Z(c)$의 중심을 연결한 직선 $O_V O_Z$의 기울기이다. 경제가 이동할 때 변하는 중심의 이동거리이다. 비슷한 방법으로 쌍대공간에서 다음 식을 정의한다.

$$\Omega = \frac{(1-m)k-(1-c)K}{mk-nK} \tag{33}$$

식 (33)을 기하학적으로 정의하면 쌍대공간에서 무차별곡선 $k(m)$의 중심과 무차별곡선 $K(n)$의 중심을 연결하는 직선 $O_k O_K$의 기울기이다. 본원 중심의 이동의 기울기 Δ와 쌍대 중심의 이동의 기울기 Ω 사이에는 어떤 관계가 성립할 것인가. 이에 대한 대답을 구하기 위하여 다음을 먼저 질문하여야 한다.

3. 약확장경로의 불가능성

질문은 수량효과의 불가능성에 의해서 경제가 본원공간에서 약확장경로의 기울기 (30)을 따라 이동할 때 쌍대공간에서 동시에 약확장경로의 기울기 (31)을 따라 이동할 수 있겠느냐이다. 대답은 '불가능하다'이다.

본원공간의 약확장경로 $H(\hat{p})I(\hat{p})F(p)$는 〈그림 6〉에서 직선인데 이 직선이 45도선과 만나는 점 I를 $I(\hat{p})$로 정의하였다. 그의 좌표는 (X, X)이다. 함수

(30)은 유일하므로 약확장경로 $H(\hat{p})I(\hat{p})F(p)$의 함수도 식 (30)으로 공통적으로 주어진다. 이 때 45도선에 위치하는 점 $I(\hat{p})=(X, X)$와 45도선 밖에 위치하는 두 점 $H(\hat{p})=[Z_1(\hat{p}), Z_2(\hat{p})]$, $F(p)=[V_1(p), V_2(p)]$는 1차 선형이므로 다음의 산술평균(arithmetic mean)의 관계가 성립한다.

$$X = \gamma V_1(p) + (1-\gamma)Z_1(\hat{p}) \tag{34}$$

$$X = \gamma V_2(p) + (1-\gamma)Z_2(\hat{p}) \tag{35}$$

여기서 γ는 가중치로서 미지수이다. 이것을 쌍대공간으로 변수전환을 하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\chi} = \frac{\gamma}{k_1(q)} + \frac{(1-\gamma)}{K_1(\hat{q})} \tag{36}$$

$$\frac{1}{\chi} = \frac{\gamma}{k_2(q)} + \frac{(1-\gamma)}{K_2(\hat{q})} \tag{37}$$

이 과정에서 본원공간과 쌍대공간의 관계를 정의하는 $\chi X=1$, $k_1V_1=1$, $k_2V_2=1$, $K_1Z_1=1$, $K_2Z_2=1$이 사용되었다. 본원공간의 좌표 $I(\hat{p})=(X, X)$는 쌍대공간에서 $I(\hat{q})=(\chi, \chi)$이다. $k_1(q)$는 기울기가 q인 점 $F(q)$의 k_1의 좌표라는 뜻이다. 나머지도 마찬가지이다. 식 (36)~(37)은 조화평균(harmonic mean)의 방정식이다. 본원공간의 산술평균 (34)~(35)는 쌍대공간의 조화평균 (36)~(37)이고, 거꾸로 본원공간의 조화평균은 쌍대공간의 산술평균이다. 본원공간과 쌍대공간에서 산술평균과 조화평균이 일치하는 경우는 세 점이 모두 45도선에 위치할 때뿐이다. 45도선을 제외한 나머지 공간에서 산술평균과 조화평균의 좌표는 일치하지 않는다.

조화평균 식 (36)~(37)에 따르면 〈그림 7〉에서 쌍대공간의 45도선에 위치하는 좌표 $I(\hat{q})=(\chi, \chi)$는 45도선 밖에 위치하는 두 좌표 $F(q)=(k_1, k_2)$와 $H(\hat{q})=(K_1, K_2)$가 만드는 쌍대 약확장경로인 직선 $H(\hat{q})J(q)F(p)$ 상에 존재할 수 없다. 직선은 산술평균이기 때문이다. 따라서 본원 약확장경로의 직

선 (30)을 따르면 쌍대확장경로의 직선 (31)을 따르지 못한다. 같은 논리를 거꾸로 적용하면 쌍대 약확장경로의 직선 (31)을 따를 때 본원 약확장경로의 직선 (30)을 따르지 못한다. 수량효과의 불가능성에 의해서 경제가 비평행 이동하더라도 본원공간과 쌍대공간에서 동시에 약확장경로를 따르는 것은 불가능하다. 경제가 본원공간의 약확장경로의 기울기 (30)을 따라 이동할 때 쌍대공간의 준확장경로의 기울기 (31)을 따라서 이동하지 못한다. 이것이 **약확장경로 불가능성**이다.

약확장경로 불가능성의 근본 이유는 본원공간과 쌍대공간에서 산술평균과 조화평균의 차이 때문이다. 그러나 약확장경로 불가능성은 강수량효과 불가능성과 다르다. 강수량효과 불가능성은 경제가 $\hat{p}=p$와 $\hat{q}=q$의 조건을 만족시키며 평행 이동하는 것이 불가능하다는 내용이다. 이에 대하여 약확장경로 불가능성은 경제가 강수량효과 불가능성에 의해 $\hat{p}\neq p$와 $\hat{q}\neq q$의 조건으로 비평행 이동할 때 본원과 쌍대 양 공간에서 동시에 약확장경로 직선 (30)과 (31)을 따라 이동하는 것이 불가능하다는 내용이다. 다른 경로를 택해야 한다.

4. 수정된 쌍대 약확장경로

〈그림 7〉의 쌍대공간에서 쌍대점 $I(\hat{q})$의 위치를 찾기 위해서 〈그림 6〉의 본원공간에서 본원공간의 직선 $H(\hat{p})I(\hat{p})F(p)$의 함수형태를 생각해 보자. 이 함수는 점 $I(\hat{p})$의 좌표 (X, X)를 지나므로 다음과 같이 정의된다.

$$X = Z_2(\hat{p}) + \frac{Z_2(\hat{p})-V_2(p)}{Z_1(\hat{p})-V_1(p)}[X - Z_1(\hat{p})] \tag{38}$$

대수적으로는 (34)를 γ에 대하여 (35)에 대입하여도 같은 결과 (38)을 얻는다. 변수 전환하면 (38)은 (39)가 된다.

$$\chi = K_2(\hat{q}) + \left[\frac{k_1(q)}{k_2(q)}\right]\left[\frac{K_2(\hat{q}) - k_2(q)}{K_1(\hat{q}) - k_1(q)}\right][\chi - K_1(\hat{q})] \tag{39}$$

조화평균 (36)~(37)을 γ에 대하여 서로 대입하여도 동일한 결과 (39)를 얻는다. 〈그림 6〉에서 설명의 편의상 $\frac{V_1}{V_2} > 1 > \frac{Z_1}{Z_2}$의 경우를 조사했는데 그에 해당하는 〈그림 7〉의 경우는 $\frac{k_1}{k_2} < 1 < \frac{K_1}{K_2}$이므로 식 (39)는 쌍대중간점 $H(\hat{q})$를 지나면서 기울기가 양수이며, 직선 $H(\hat{q})F(q)$의 기울기 $\left(\frac{K_2-k_2}{K_1-k_1}\right)$보다 낮은 직선의 방정식이다. 이 밖의 일반적인 경우에도 최종 결론에는 변동이 없다. 이 직선이 45도선과 만나는 점이 $I(\hat{q})$이므로 〈그림 7〉의 쌍대공간에서 직선 $H(\hat{q})I(\hat{q})$의 함수이다. 점 $I(\hat{q})$의 좌표는 (χ, χ)이므로 45도선 상에 존재하지만 직선 $H(\hat{q})J(q)F(q)$에서 이탈하여 존재한다.

한편 식 (38)을 재구성하면 다음과 같이 동등하게 표현할 수 있다.

$$X = V_2(p) + \frac{V_2(p) - Z_2(\hat{p})}{V_1(p) - Z_1(\hat{p})}(X - V_1(p)) \tag{40}$$

대수적으로는 (34)를 $1-\gamma$에 대하여 (35)에 대입하여도 같은 결과 (40)을 얻는다. 따라서 식 (38)은 식 (40)과 독립이 아니다. 기울기가 같고 한 점 $I(\hat{p})$을 공유하기 때문이다. 변수 전환을 하면 식 (40)은 식 (41)이 된다.

$$\chi = k_2(q) + \left[\frac{K_1(\hat{q})}{K_2(\hat{q})}\right]\left[\frac{k_2(q) - K_2(\hat{q})}{k_1(q) - K_1(\hat{q})}\right][\chi - k_1(q)] \tag{41}$$

조화평균 (36)~(37)을 $1-\gamma$에 대하여 서로 대입하여도 동일한 결과 (41)을 얻는다. 역시 설명의 편의상 $\frac{k_1}{k_2} < 1 < \frac{K_1}{K_2}$의 경우에 식 (41)은 〈그림 7〉의 쌍대공간에서 점 $F(q)$와 점 $I(\hat{q})$를 지나면서 기울기가 쌍대 준수량효과 $H(\hat{q})F(q)$의 기울기 $\left(\frac{k_2-K_2}{k_1-K_1}\right)$보다 높은 직선의 방정식이다. 이 직선이 〈그림 7〉의 쌍대공간에서 직선 $I(\hat{q})F(q)$의 함수이다. 식 (39)와 식 (41)은 독립이다. 공통점은 하나이며 기울기가 다르기 때문이다.

그러므로 본원문제에서 경제가 1차 선형 관계로써 산술평균의 경로인 본원공간의 직선 $H(\hat{p})I(\hat{p})F(p)$를 따라 움직일 때, 쌍대문제에서는 1차 선형 관계가 아닌 조화평균의 경로로써 점 $H(\hat{q})$을 떠나 점 $I(\hat{q})$에서 한 번 屈折한 뒤 점 $F(q)$로 이동한다. 점 $I(\hat{q})$은 쌍대변환점이다. 쌍대공간에서 屈折線 $H(\hat{q})I(\hat{q})F(q)$를 수정된 쌍대 약확장경로(modified dual weak expansion path)라고 부를 수 있다. 이 경로는 X의 크기에 대하여 중립이다.

5. 수정된 본원 약확장경로

〈그림 7〉에서 쌍대공간의 약수량효과 $H(\hat{q})JF(p)$가 45도선과 만나는 점 $J=(\omega, \omega)=J(q)$이다. 점 $J(q)$는 본원점 $J(p)$의 쌍대점이고, $\omega W=1$이다. 그러면 약수량효과를 구성하는 세 점 $H(\hat{q})$, $J(q)$, $F(q)$는 1차선형의 관계로써 점 $J(q)$는 점 $H(\hat{q})$와 점 $F(q)$의 산술평균으로 표현할 수 있다. 점 $H(\hat{q})$의 좌표는 $[K_1(\hat{q}),\ K_2(\hat{q})]$이고, 점 $F(q)$의 좌표는 $[k_1(q),\ k_2(q)]$이며, 점 $J(q)$의 좌표는 (ω, ω)이므로 이들 사이의 관계는 다음과 같이 선형이다.

$$\omega = \pi k_1(q) + (1-\pi) K_1(\hat{q}) \tag{42}$$

$$\omega = \pi k_2(q) + (1-\pi) K_2(\hat{q}) \tag{43}$$

여기서 가중치 π는 미지수이다. 식 (38)~(39)는 산술평균의 식이다. 쌍대문제를 본원문제로 전환하기 위해서 변수 전환을 하면 식 (38)~(39)는 다음과 같다.

$$\frac{1}{W} = \frac{\pi}{V_1(p)} + \frac{1-\pi}{Z_1(\hat{p})} \tag{44}$$

$$\frac{1}{W} = \frac{\pi}{V_2(p)} + \frac{1-\pi}{Z_2(\hat{p})} \tag{45}$$

이 과정에서 $\omega W=1$, $k_1 V_1=1$, $k_2 V_2=1$, $K_1 Z_1=1$, $K_2 Z_2=1$이다. 본

원공간의 45도선 상의 좌표 (W, W)가 점 $J(p)$이므로 점 W는 쌍대점 ω의 본원점이다.

식 (40)~(41)은 조화평균의 식이 되므로 선형관계가 아니다. 그러면 식 (40)~(41)을 구성하는 〈그림 5〉의 세 본원좌표 $W=[W, W]$, $F(p)=[V_1(p), V_2(p)]$, $H(\hat{p})=[Z_1(\hat{p}), Z_2(\hat{p})]$을 직선 $H(\hat{p})I(\hat{p})F(p)$에서 정의하는 것은 불가능하다. 이처럼 쌍대문제에서 변수 사이의 1차 선형 관계는 본원문제에서는 성립하지 않는다. 그러므로 쌍대공간의 약수량효과 $H(\hat{q})J(q)F(q)$ 상의 쌍대점 $J(q)$에 대한 본원공간에서 본원점 $J(p)$는 본원공간의 약수량효과인 직선 $H(\hat{p})I(\hat{p})F(p)$ 상에서는 발견할 수 없다. 본원공간과 쌍대공간에서 산술평균과 조화평균의 차이 때문이다.

〈그림 6〉의 본원공간에서 본원점 $J(p)$의 위치를 찾기 위해서 〈그림 7〉의 쌍대공간에서 쌍대 확장경로의 직선 $H(\hat{q})J(q)F(q)$의 함수형태를 생각해 보자. 이 쌍대 약수량효과는 기하학적으로는 〈그림 7〉에서 점 $J(q)$의 좌표 (ω, ω)와 점 $H(\hat{q})$의 좌표 $[K_1(\hat{q}), K_2(\hat{q})]$와 점 $F(q)$의 좌표 $[k_1(q), k_2(q)]$를 지나므로 다음과 같이 정의된다.

$$\omega = K_2(\hat{q}) + \frac{K_2(\hat{q})-k_2(q)}{K_1(\hat{q})-k_1(q)}(\omega - K_1(\hat{q})) \tag{46}$$

대수적으로는 식 (38)을 식 (39)에 π에 대하여 대입하여도 같은 결과를 얻는다. 변수 전환하면 (46)은 (47)이 된다.

$$W = Z_2(\hat{p}) + \left[\frac{V_1(p)}{V_2(p)}\right]\left[\frac{Z_2(\hat{p})-V_2(p)}{Z_1(\hat{p})-V_1(p)}\right][W - Z_1(\hat{p})] \tag{47}$$

대수적으로는 조화평균 (40)~(41)을 π에 대하여 서로 대입하여도 같은 결과 (47)을 얻는다. 다시 말하면, 식 (47)은 조화평균 (40)~(41)의 다른 표현이다. 〈그림 6〉은 설명의 편의상 $\frac{V_1}{V_2} > 1 > \frac{Z_1}{Z_2}$의 경우를 그렸으므로 식 (47)은 본원문제의 점 $H(\hat{p})$와 점 $J(p)$를 통과하고 기울기가 직선 $H(\hat{p})F(p)$의 기울기

$\left(\frac{Z_2-V_2}{Z_1-V_1}\right)$보다 급한 직선의 방정식이다. 이 밖의 일반적인 경우에도 최종 결론에는 영향이 없다. 이 직선이 45도선과 만나는 점이 $J(p)$이므로 식 (47)은 〈그림 6〉의 본원공간에서 직선 $H(\hat{p})J(p)$의 함수이다. 점 $J(p)$의 좌표가 (W, W)이므로 45도선 상에 존재하지만, 점 $J(p)$는 본원 약확장경로의 직선 $H(\hat{p})I(\hat{p})F(p)$에서 이탈하여 존재한다. 이 역시 본원공간과 쌍대공간에서 산술평균과 조화평균의 관계 때문이다.

한편 식 (46)을 재구성하면 다음과 같이 동등하게 표현할 수 있다.

$$\omega = k_2(q) + \frac{k_2(q)-K_2(\hat{q})}{k_1(q)-K_1(\hat{q})}(\omega - k_1(q)) \tag{48}$$

대수적으로는 식 (38)을 식 (39)에 $1-\pi$에 대하여 대입하여도 같은 결과 (48)을 얻는다. 식 (48)과 식 (46)은 독립이 아니다. 점 $J(q)$를 공유하고 기울기가 동일하기 때문이다. 변수 전환을 하면 식 (48)은 식 (49)가 된다.

$$W = V_2(p) + \left[\frac{Z_1(\hat{p})}{Z_2(\hat{p})}\right]\left[\frac{V_2(p)-Z_2(\hat{p})}{V_1(p)-Z_1(\hat{p})}\right][W - V_1(p)] \tag{49}$$

조화평균 (40)~(41)을 $(1-\pi)$에 대하여 서로 대입하여도 같은 결과 (49)를 얻는다. 다시 말하면, 식 (49) 역시 조화평균 (44)~(45)의 다른 형태의 표현이다. 역시 설명의 편의상 $\frac{V_1}{V_2} > 1 > \frac{Z_1}{Z_2}$의 경우에, 식 (49)는 〈그림 6〉에서 본원 종착점 $F(p)$와 점 $J(p)$를 지나며 기울기는 직선 $H(\hat{p})F(p)$의 기울기 $\left(\frac{V_2-Z_2}{V_1-Z_1}\right)$보다 낮은 직선의 방정식이다. 이 직선이 〈그림 6〉에서 직선 $F(p)J(p)$의 함수이다. 식 (49)와 식 (47)은 서로 독립이다. 점 $J(p)$를 공유하지만 기울기가 다르기 때문이다.

그러므로 쌍대공간에서 경제가 1차 선형 관계로써 산술평균의 경로인 직선 $H(\hat{q})J(q)F(q)$를 따라 움직일 때, 본원공간에서는 1차 선형 관계가 아닌 조화평균의 경로로써 점 $H(\hat{p})$을 떠나 점 $J(p)$에서 한 번 굴절한 뒤 점 $F(p)$

로 이동한다. 점 $J(p)$는 본원변환점이다. 본원공간의 굴절선(refraction curve) $H(\hat{p})J(p)F(p)$를 수정된 본원 약확장경로(modified primary expansion path)라고 부를 수 있다. 이 경로는 W의 크기에 대하여 중립이다.

6. 공통 약확장경로

지금까지 약확장경로의 본원문제와 쌍대문제를 따로 따로 살펴보았다. 쌍대공간에서 약확장경로의 직선을 따르고 본원공간에서는 수정된 약확장경로의 굴절곡선을 따르는 것은 중간 과정이 서로 일치하지 않고 함수형태도 다르다. 반대로 본원공간에서 약확장경로의 직선을 따르고 쌍대공간에서 수정된 약확장경로의 굴절곡선을 따르면 역시 중간 과정이 일치하지 않고 함수형태도 다르다. 이 같은 현상은 세 점 사이의 관계가 본원공간에서 산술평균이면 쌍대공간에서 조화평균이 되고 거꾸로 본원공간에서 조화평균이면 쌍대공간에서 산술평균이기 때문이다. 본원공간은 단위시간 당 유통속도를 측정하고 쌍대공간은 단위 유통속도 당 유통시간을 측정한다. 그러므로 유통속도가 직선이면 유통시간은 굴절곡선이고 유통시간이 직선이면 유통속도는 굴절곡선이다. 유통속도와 유통시간이 동시에 직선일 수 없다. 유통속도는 공간의 길이를 측정한다. 따라서 시간이 직선으로 짧아지면 공간은 곡선으로 길어지고, 공간이 직선으로 짧아지면 시간은 곡선으로 길어진다. 시간과 공간이 동시에 짧아질 수 없다.

그러나 유통속도와 유통시간이 모두 동일한 곡선이 될 수 있는 가능성은 있다. 수정된 본원 약확장경로와 수정된 쌍대 약확장경로가 함수형태도 동일하고 경로도 처음부터 끝까지 일치하는 공통 약확장경로를 찾을 차례이다. 두 가지 방향에서 찾는다. 하나는 본원공간의 직선 $H(\hat{p})I(\hat{p})F(p)$의 주변에서 찾고 다른 하나는 쌍대공간의 직선 $H(\hat{q})J(q)F(q)$의 주변에서 찾는다.

첫째, 〈그림 6〉에 새로운 점 T의 좌표 $(\overline{W}, \overline{W})$를 지나가는 새 변수 $\overline{W} = \phi X + (1-\phi)W$를 정의하고, 점 T와 점 $F(p)$를 연결하는 직선 $TF(p)$의 기울기가 두 직선 $J(p)F(p)$와 $I(\hat{p})F(p)$의 기울기의 가중치가 되도록 정의하면, 직선 $TF(p)$는 본원공간에서 다음과 같이 정의된다(복잡함을 피하기 위하

여 그림에서 점의 표시는 생략함).

$$\overline{W} = V_2(p) + \left[\phi + (1-\phi)\frac{Z_1(\hat{p})}{Z_2(\hat{p})}\right]\left[\frac{V_2(p)-Z_2(\hat{p})}{V_1(p)-Z_1(\hat{p})}\right][\overline{W} - V_1(p)] \quad (50)$$

식 (50)은 독립 방정식이다. 같은 방식으로 점 T와 점 $H(\hat{p})$를 연결하는 직선 $H(\hat{p})T$의 방정식은 다음과 같다.

$$\overline{W} = Z_2(\hat{p}) + \left[\phi + (1-\phi)\frac{V_1(p)}{V_2(p)}\right]\left[\frac{V_2(p)-Z_2(\hat{p})}{V_1(p)-Z_1(\hat{p})}\right][\overline{W} - Z_1(\hat{p})] \quad (51)$$

식 (51) 역시 독립이다. 본원공간에서 경제는 식 (51)이 나타내는 경로 $H(\hat{p})T$를 따라 움직여 점 T에 도착한 후 경로를 바꾸어 식 (50)이 나타내는 경로 $TF(p)$를 따라 움직인다. 합치면 본원공간에서는 경제가 움직이는 경로는 굴절곡선 $H(\hat{p})TF(p)$이다.

둘째, 〈그림 7〉에서 새로운 변수 $\overline{\omega} = \theta\chi + (1-\theta)\omega$로 정의되는 점 T의 좌표 $(\overline{\omega}, \overline{\omega})$를 통과하고, 기울기가 직선 $H(\hat{q})I(\hat{q})$의 기울기와 직선 $TF(q)$의 기울기의 가중평균이며, 점 $H(\hat{q})$를 연결하는 직선의 방정식은 다음과 같다 (복잡함을 피하기 위하여 그림에서 점의 표시는 생략함).

$$\overline{\omega} = K_2(\hat{q}) + \left[\theta + (1-\theta)\frac{k_1(q)}{k_2(q)}\right]\left[\frac{k_2(q)-K_2(\hat{q})}{k_1(q)-K_1(\hat{q})}\right][\overline{\omega} - K_1(\hat{q})] \quad (52)$$

마찬가지 방식으로 좌표 $(\overline{\omega}, \overline{\omega})$와 점 $F(q)$를 연결하는 식의 방정식은 다음과 같다.

$$\overline{\omega} = k_2(q) + \left[\theta + (1-\theta)\frac{K_1(\hat{q})}{K_2(\hat{q})}\right]\left[\frac{k_2(q)-K_2(\hat{q})}{k_1(q)-K_1(\hat{q})}\right][\overline{\omega} - k_1(q)] \quad (53)$$

식 (52)와 식 (53)은 독립이다. 여기서 $\overline{W}\,\overline{\omega}=1$이고, $\phi=1-\theta$이며, $\phi\neq\theta$이다. 쌍대공간에서 경제는 식 (52)가 나타내는 경로 $H(\hat{q})T$를 따라 움직여 점 T에 도착한 후 경로를 바꾸어 식 (53)이 나타내는 경로 $TF(q)$를 따라 움직인다. 합치면 쌍대공간에서는 경제가 움직이는 경로는 굴절곡선 $H(\hat{q})TF(q)$이다.

식 (49)와 식 (52)는 함수형태가 동일하며, 변수 전환을 하여도 동일하다. 식 (50)과 식 (53) 역시 함수형태가 동일하며, 변수 전환을 하여도 동일하다. 본원공간과 쌍대공간에서 서로 정확한 대칭이다. 식 (50)~(51)의 경로와 식 (52)~(53)의 경로는 함수도 동일하고 이동경로도 동일하다. 경제가 본원공간에서 식 (50)~(51)의 경로로 움직일 때 쌍대공간에서 식 (52)~(53)의 경로로 움직인다. 공통 약확장경로의 식이다. 본원공간에서 점 $H(\hat{p})$을 출발하여 점 $F(p)$에 도달할 때 쌍대공간에서는 점 $H(\hat{q})$를 출발하여 점 $F(q)$에 도달하는 유일한 공통경로이다.

식 (50)의 기울기는 본원 약확장경로의 그것보다는 작다. 식 (50)이 45도선과 만나는 점 T의 좌표가 $(\overline{W}, \overline{W})$이다. 그러므로 점 T는 직선 $H(\hat{p})I(\hat{p})F(p)$ 밖에 위치한다. 마찬가지로 식 (53)의 기울기는 쌍대 약확장경로의 그것보다 크다. 식 (53)이 45도선과 만나는 점 T의 좌표가 $(\overline{\omega}, \overline{\omega})$이다. 점 T는 직선 $H(\hat{q})J(q)F(q)$ 밖에 위치한다. 경제가 본원공간에서 식 (50)~(51)을 따라 $H(\hat{p})TF(p)$로 이동할 때 쌍대공간에서는 식 (52)~(53)을 따라 $H(\hat{q})TF(q)$로 이동한다. $H(\hat{q})TF(q)$는 $H(\hat{p})TF(p)$이 거울에 비친 상이다.

Ⅵ. 약수량효과의 특성

본원문제의 약확장경로와 쌍대문제의 약확장경로의 동시 비교는 우리에게 수량효과의 불가능성과 약확장경로의 불가능성을 제공하였다. 이 과정에서 찾아낸 비밀은 본원공간과 쌍대공간에서 각각 굴절된 공통약확장경로 (50)~(51)과

(52)~(53)이다. 〈그림 6〉 [또는 〈그림 7〉]에서 경제가 단순 약확장경로 $H(\hat{p})I(\hat{p})F(p)$[또는 $H(\hat{q})J(q)F(q)$]를 따라 산술평균의 경로인 직선으로 이동하지 못하고 조화평균의 경로를 따라 공통 약확장경로 $H(\hat{p})TF(p)$[또는 $H(\hat{q})TF(q)$]를 따라 이동한다는 사실이 밝혀졌다. 이것이 경제가 중간점 $H(\hat{p})$[또는 $H(\hat{q})$]에서 종착점 $F(p)$[또는 $F(q)$]로 이동하는 약수량효과의 정체이다.

1. 약수량효과의 분할

약수량효과 $H(\hat{p})TF(p)$[또는 $H(\hat{q})TF(q)$]는 점 T에서 굴절되어 있다. 따라서 점 T를 중심으로 앞부분 $H(\hat{p})T$[또는 $H(\hat{q})T$]와 뒷부분 $TF(p)$[또는 $TF(q)$]로 두 부분으로 나눌 수 있다.

이 가운데 앞부분 $H(\hat{p})T$[또는 $H(\hat{q})T$]는 총효과가 가격이 변하지 않는 수량효과와 가격이 변하는 대체효과로 분할(decomposition)되듯이 가격 $\hat{p}$[또는 $\hat{q}$]가 변하지 않는 $\hat{p}\hat{q}$ 부분수량효과 $H(\hat{p})I(\hat{p})$[또는 $H(\hat{q})I(\hat{q})$] 부분과 가격이 변하는 $I(\hat{p})T$[또는 $I(\hat{q})T$] 부분으로 다시 분할된다.

마찬가지로 뒷부분 $TF(p)$[또는 $TF(q)$] 역시 가격 p[또는 q]가 변하지 않는 pq 부분수량효과 $J(p)F(p)$[또는 $J(q)F(q)$]와 가격이 변하는 $J(p)T$[또는 $J(q)T$] 부분으로 재차 분할된다. 이 분할은 경제가 본원공간[또는 쌍대공간]에서 점 $I(p)$[또는 점 $I(q)$]와 점 $J(p)$[또는 점 $J(q)$]에서 두 번 지그재그하며 굴절하여 이동하는 것으로 나누어 생각할 수 있다.

본원공간

$$H(\hat{p})F(p) = H(\hat{p})T + TF(p) \tag{54}$$

$$H(\hat{p})T = H(\hat{p})I(\hat{p}) + I(\hat{p})T \tag{55}$$

$$TF(p) = TJ(p) + J(p)F(p) \tag{56}$$

쌍대공간

$$H(\hat{q})F(q) = H(\hat{q})T + TF(q) \tag{57}$$

$$H(\hat{q})T = H(\hat{q})I(\hat{q}) + I(\hat{q})T \tag{58}$$

$$TF(q) = TJ(q) + J(q)F(q) \tag{59}$$

이것을 본원-쌍대 양 공간에서 공통적으로 다음과 같이 요약할 수 있다.

$$\begin{aligned}\text{약수량효과} &= \hat{p}\hat{q}\ \text{부분수량효과} + \text{본원부분약수량효과}\ I(\hat{p})J(p) \\ &\quad + pq\ \text{부분수량효과}\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}&= \hat{p}\hat{q}\ \text{부분수량효과} + \text{쌍대부분약수량효과}\ I(\hat{q})J(q) \\ &\quad + pq\ \text{부분수량효과}\end{aligned} \tag{61}$$

경제가 점 $I(\hat{p})$[또는 점 $I(\hat{q})$]와 점 $J(p)$[또는 점 $J(q)$]에서 두 번 지그재그로 굴절한다는 사실은 흡사 빛이 직진하지만 두 개의 프리즘에서 두 번 굴절(refraction)하는 현상에 비유할 수 있다. 또 물체의 직선모습이 서로 다른 두 개의 매개체를 통과할 때 두 번 굴절되는 현상에도 비유할 수 있다. 하나의 매개체에서 직선으로 이동하다가 다른 매개체를 만나 굴절할 때 그 순간 물체는 매개체와 매개체 사이의 경계선에 위치하게 된다.

이와 마찬가지로 경제가 하나의 직선을 따라 이동하다가 여건의 변화로 다른 영역으로 들어설 때 분할곡선을 지나면서 경로가 굴절되는 현상으로 설명할 수 있다. 여기서 매개체는 가격 p와 q이다. 가격 p와 q가 변하면 굴절하는 것이다. 공통 확장경로 상에는 경로의 굴절을 요구하는 지점에 분할곡선(decomposition curve) $X(\hat{b})$[또는 $\chi(\hat{l})$]와 $W(b)$[또는 $\omega(l)$]가 존재한다.

본원(쌍대)공간의 약수량효과는 두 개의 분할곡선 $X(\hat{b})$와 $W(b)$[또는 $\chi(\hat{l})$와 $\omega(l)$]을 중심으로 세 경로로 분리되어 있다. 첫째 경로 $H(\hat{p})I(\hat{p})$[또는 $H(\hat{q})I(\hat{q})$]은 여건이 변하기 전의 공통정보 $\hat{p}$[또는 $\hat{q}$]를 간직하고 있고, 셋째 경로 $J(p)F(p)$[또는 $J(q)F(q)$]은 여건이 변한 후의 공통정보 p[또

는 q]를 간직하고 있다. 이 둘 사이에 중간 경로 $I(\hat{p})J(p)$[또는 $I(\hat{q})J(q)$]가 둘째 경로로서 존재한다.

이 현상은 분할곡선을 중심으로 그 전의 정보와 그 후의 정보가 다른 것은 분할곡선을 중심으로 매개체가 다른 것에 비유할 수 있다. 이 정보의 차이가 나타날 때에는 첫째 분할곡선 $X(\hat{b})$[또는 $\chi(\hat{l})$] 이전의 상대가격이 $\hat{p}$[또는 $\hat{q}$]에서 둘째 분할곡선 $W(b)$[또는 $\omega(l)$] 이후의 상대가격 p[또는 q]로 변하기 때문에 첫째 수량효과에는 $\hat{p}$[또는 $\hat{q}$]의 정보가 들어 있다. 이 부분수량효과는 앞에서 이미 $\hat{p}\hat{q} = \frac{c}{1-c}\frac{n}{1-c}$으로 표현되었다. 셋째, 수량효과에서는 p [또는 q]의 정보가 들어 있다. 이 부분수량효과도 앞에서 이미 $pq = \frac{a}{1-a}\frac{m}{1-m}$으로 표현되었다. 이 사이에 끼인 둘째 수량효과는 두 분할곡선 $X(\hat{b})$[또는 $\chi(\hat{l})$]와 $W(b)$[또는 $\omega(l)$] 사이에서 상대가격을 $\hat{p}$[또는 $\hat{q}$]와 p[또는 q] 사이에서 조정하는 과정이다. 이 중간 경로가 수량효과의 정의를 불가능하게 만든 약수량효과이다. 이 약수량효과는 $p=f(\hat{p})$와 $q=g(\hat{q})$로 표현되는데 아래에서 함수 형태가 밝혀진다.

이상에 비추어서 본원문제에서 보았을 때 약수량효과는 다음의 세 가지 연속으로 정의할 수 있다.

점의 연속	$(H(\hat{p}), \cdots, I(\hat{p}), \cdots, T, \cdots, J(p), \cdots, F(p))$
무차별곡선의 연속	$(Z(c), \cdots, X(\hat{b}), \cdots, W(b), \cdots, V(a))$
가중치의 연속	$(c, \cdots, \hat{b}, \cdots, b, \cdots, a)$

본원문제에서 볼 때 경제는 중간점 $H(\hat{p})$을 떠나 1차 변환점 $I(\hat{p})$까지 평행 이동하고 여기서 한 번 굴절하여 2차 변환점 $J(p)$까지 비평행하게 진행한 다음 여기서 재차 굴절한 후 종착점 $F(p)$에 평행 이동하는 공통 확장경로를 택한다.

한편, 쌍대문제에서 볼 때 약수량효과는 다음의 세 가지 연속으로 정의할 수 있다.

점의 연속	$(H(\hat{q}), \cdots, I(\hat{q}), \cdots, T, \cdots, J(q), \cdots, F(q))$
무차별곡선의 연속	$(K(n), \cdots, \chi(\hat{l}), \cdots, \omega(l), \cdots, k(m))$
가중치의 연속	$(n, \cdots, \hat{l}, \cdots, l, \cdots, m)$

이 정의는 중간점 $H(\hat{q})$을 떠나 1차 변환점 $I(\hat{q})$에서 한 번 굴절하고, 2차 변환점 $J(q)$에서 재차 굴절한 후, 종착점 $F(q)$까지 이동하는 공통약확장경로를 택할 때 연속적으로 변하는 점들의 집합이다. 이 때 그 경로는 각 점을 지나가는 무차별곡선의 연속과 각 무차별곡선을 정의하는 가중치의 연속으로 특징지어진다.

2. 본원공간의 굴절곡선

식 (50)~(51)과 식 (52)~(53)은 공통 확장경로를 나타낸다. 그러나 서로 독립이 아니다. 정확한 대칭이기 때문이다. 거울에 비친 상이다. 변수 전환을 통한 동일한 방정식이다. 두 식 가운데 식 (50)을 선택하자. 식 (50)은 두 개의 식 (38)과 (39)의 가중평균임을 보여 주었다. 그러므로 공통 확장경로 (50)은 식 (38)과 (49)로 구성되어 있다.

식 (38)은 본원공간에서 경제가 점 $H(\hat{p}) = [Z_1(\hat{p}),\ Z_2(\hat{p})]$를 떠나 변환점 $I(\hat{p}) = [X,\ X]$에서 한 번 굴절한 현상을 나타낸다. 그 뒤 45도선을 따라 이동하다가 식 (49)에 의해 변환점 $J(p) = [W,\ W]$에서 두 번째 굴절하여 종착점 $F(p) = [V_1(p),\ V_2(p)]$에 도착하는 경로를 나타낸다. 이 현상은 쌍대공간에서 중간점 $H(\hat{q}) = [K_1(\hat{q}),\ K_2(\hat{q})]$을 떠나 변환점 $I(\hat{q}) = [\chi,\ \chi]$에서 한 번 굴절한 뒤 45도선을 따라 이동하다가 변환점 $J(q) = [\omega, \omega]$에서 두 번째 굴절하여 종착점 $F(q) = [k_1(q),\ k_2(q)]$에 도착하는 경로와 일치한다. 처음부터 끝까지 동일한 경로를 거친다. 함수의 형태도 일치한다. 본원공간에서 지그재그 약확장경로 $H(\hat{p})I(\hat{p})J(p)F(p)$[또는 쌍대공간에서 $H(\hat{q})I(\hat{q})J(q)F(q)$]

는 공통 약확장경로이다. 이 내용을 식 (38)과 식 (49)가 나타낸다. 이들 식은 굴절된 모습을 보이므로 수정된 공통 약확장경로 상의 **굴절곡선**(refraction curve)이라고 부르자. 본원공간의 굴절곡선은 다음의 방정식 체계로 나타낼 수 있다.

$$V_1 = a\left[1 + \left(\frac{1-a}{a}\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\right]V \tag{62}$$

$$V_2 = (1-a)\left[1 + \left(\frac{a}{1-a}p\right)^{\frac{1}{2}}\right]V \tag{63}$$

$$Z_1 = c\left[1 + \left(\frac{1-c}{c}\frac{1}{\hat{p}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]Z \tag{64}$$

$$Z_2 = (1-c)\left[1 + \left(\frac{c}{1-c}\hat{p}\right)^{\frac{1}{2}}\right]Z \tag{65}$$

$$V_2 = W + \frac{Z_1}{Z_2}\frac{V_2-Z_2}{V_1-Z_1}(V_1-W) \tag{66}$$

$$Z_2 = X + \frac{V_2-Z_2}{V_1-Z_1}(Z_1-X) \tag{67}$$

식 (62)~(63)은 굴절곡선의 종착점 F의 좌표를 정의한 것이고, 식 (64)~(65)는 굴절곡선의 출발점 H의 좌표를 정의한 것이다. 식 (66)은 굴절곡선의 JF부분을 정의한 것이고, 식 (67)은 굴절곡선의 HI부분을 정의한 것이다. 식 (62)~(63)과 식 (64)~(65)를 식 (66)에 대입하여 정리하면 다음 식과 같다.

$$(p\hat{p})^{\frac{1}{2}} = \frac{\beta}{aV-cZ}\hat{p}^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{c}{1-c}\frac{a}{1-a}\right)^{\frac{1}{2}}\Delta \tag{68}$$

여기서 다음 식이 성립한다.

$$\beta = \left[(1-a)\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\frac{1}{2}} - a\left(\frac{c}{1-c}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{\hat{p}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]V + \left[c\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\frac{1}{2}} - (1-c)\left(\frac{c}{1-c}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{\hat{p}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]Z - \left[\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{c}{1-c}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{\hat{p}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]W \tag{69}$$

식 (68)이 본원공간의 굴절곡선의 방정식이다.

3. 쌍대공간의 굴절곡선

본원굴절곡선의 기하학적인 정의 (68)의 의미를 더욱 찾으려면 그것의 대칭 관계인 쌍대공간을 함께 생각해야 한다. 본원굴절곡선의 정의 (68)을 유도한 같은 방식을 쌍대공간에 적용하면 그의 방정식 체계는 다음과 같다.

$$k_1 = m\left[1 + \left(\frac{1-m}{m}\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\right]k \tag{70}$$

$$k_2 = (1-m)\left[1 + \left(\frac{m}{1-m}q\right)^{\frac{1}{2}}\right]k \tag{71}$$

$$K_1 = n\left[1 + \left(\frac{1-n}{n}\frac{1}{\hat{q}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]K \tag{72}$$

$$K_2 = (1-n)\left[1 + \left(\frac{n}{1-n}\hat{q}\right)^{\frac{1}{2}}\right]K \tag{73}$$

$$k_2 = x + \frac{K_1}{K_2}\frac{k_2 - K_2}{k_1 - K_1}(k_1 - x) \tag{74}$$

$$K_2 = \omega + \frac{k_2 - K_2}{k_1 - K_1}(K_1 - \omega) \tag{75}$$

식 (70)~(71)은 굴절곡선의 마지막 점 F의 좌표를 정의한 것이고, 식 (72)~(73)은 굴절곡선의 처음 점 H의 좌표를 정의한 것이다. 식 (74)는 굴절

곡선의 JF 부분을 정의한 것이고, 식 (75)는 굴절곡선의 HI 부분을 정의한 것이다. 식 (70)~(71)과 식 (72)~(73)을 식 (74)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$(q\hat{q})^{\frac{1}{2}} = \frac{\delta}{mk-nK}\hat{q}^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{n}{1-n}\frac{m}{1-m}\right)^{\frac{1}{2}}\Omega \tag{76}$$

여기서

$$\begin{aligned}\delta = & \left[(1-m)\left(\frac{m}{1-m}\right)^{\frac{1}{2}} - m\left(\frac{n}{1-n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{q}{\hat{q}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]k \\ & + \left[n\left(\frac{m}{1-m}\right)^{\frac{1}{2}} - (1-n)\left(\frac{n}{1-n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{q}{\hat{q}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]K \\ & - \left[\left(\frac{m}{1-m}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{n}{1-n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{q}{\hat{q}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\omega \end{aligned} \tag{77}$$

이다. 식 (76)이 본원공간의 굴절곡선의 방정식이다.

4. 본원공간의 약수량효과와 쌍대공간의 약수량효과

양 공간의 굴절곡선은 일치하여야 한다. 두 개의 굴절곡선의 식을 곱하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(p\hat{p}q\hat{q})^{\frac{1}{2}} = & \frac{\beta}{aV-cZ}\frac{\delta}{mk-nK}(\hat{p}\hat{q})^{\frac{1}{2}} \\ & + \frac{\beta}{aV-cZ}\hat{p}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{1-n}\frac{m}{1-m}\right)^{\frac{1}{2}}\Omega \\ & + \frac{\delta}{mk-nK}\hat{q}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{c}{1-c}\frac{a}{1-a}\right)^{\frac{1}{2}}\Delta \\ & + \left(\frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\frac{m}{1-m}\frac{n}{1-n}\right)^{\frac{1}{2}}\Delta\Omega \end{aligned} \tag{78}$$

그러나 식 (26)과 식 (27)에서 다음 식이 성립한다.

$$p\hat{p}q\hat{q} = \frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\frac{m}{1-m}\frac{n}{1-n} \tag{79}$$

그러므로 미정계수법에 의하여 다음이 성립한다.

$$\beta = 0 \tag{80}$$

$$\delta = 0 \tag{81}$$

$$\Delta\Omega = 1 \tag{82}$$

따라서 이 결과를 식 (68)과 식 (76)에 대입하면 다음의 정리가 성립한다.

정리 2 본원공간에서 중간점 $H(\hat{p})$의 기울기 $\hat{p}$와 종착점 $F(p)$의 기울기 p의 관계를 정의하는 본원약수량효과의 방정식은 다음과 같다.

$$p\hat{p} = \frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\Delta^2 \tag{83}$$ [2]

정리 3 쌍대공간에서 중간점 $H(\hat{q})$의 기울기 $\hat{q}$와 종착점 $F(q)$의 기울기 q의 관계를 정의하는 쌍대약수량효과의 방정식은 다음과 같다.

$$q\hat{q} = \frac{m}{1-m}\frac{n}{1-n}\Omega^2 \tag{84}$$ [3]

식 (83)이 바로 본원약수량효과를 나타내는 식 (6)의 $p = f(\hat{p})$의 함수 형태이다. 식 (83)에서 $\frac{1-a}{a}$는 직선 OO_V의 기울기이고, $\frac{1-c}{c}$는 직선 OO_Z의 기울기이며, p는 직선 $O_VF(p)$의 기울기이고, $\hat{p}$는 직선 $O_ZH(\hat{p})$의 기울기이

2) 김학은 [3], p. 297, 식 (48).
3) 김학은 [3], p. 297, 식 (49).

다. 삼각형 OO_VO_Z에서 변 O_ZO_V의 기울기의 자승을 두 변 OO_Z의 기울기와 OO_V의 기울기의 곱으로 나누어 준 것이 $p\hat{p}$이다.

$$p\hat{p} = \frac{[O_VO_Z\text{의 기울기}]^2}{[OO_V\text{의 기울기}][OO_Z\text{의 기울기}]} \tag{85}$$

그러므로 본원약수량효과 $p\hat{p}$는 〈그림 1〉의 본원공간에서 삼각형 OO_VO_Z의 세 변 사이의 관계를 정의하고 있다.

경제가 본원출발점 $F(p_o)$의 기울기 p_o에서 출발하여 본원중간점 $H(\hat{p})$의 기울기 $\hat{p}$를 거쳐서 본원 종착점 $F(p)$의 기울기 p에 도달한다. 식 (83)은 이 가운데 경제가 본원공간에서 약수량효과에 의해 $\hat{p}$에서 p로 움직인 내용을 표현한 방정식으로서 본원공간 약수량효과의 정의이다. 이 때 (a, c, V, Z)가 유일하면 식 (83)에 의하면 p와 $\hat{p}$의 관계는 직각쌍곡선의 관계이고, 그 상수는 $\frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\Delta^2$이므로 유일하며, 따라서 본원 약수량효과는 유일하다. 즉, 식 (83)이 본원공간에서 약수량효과를 정의하는 추가적인 독립방정식 (6) $p=f(\hat{p})$의 정체이다. 〈그림 4〉의 2 상한의 접선이 식 (83)을 기하학적으로 묘사하고 있다.

약수량효과의 유일성을 더욱 분명하게 설명하기 위해 본원 약수량효과의 정의 (83)을 기하학적으로 표현해 보자. 식 (83)은 경제가 본원약수량효과에 따라 본원 확장경로를 따라 이동할 때 기울기 $\hat{p}$에서 기울기 p로 변하는 관계를 나타낸다. 이 식의 기하학적 의미를 조사하기 위하여 식 $F(p)$와 $H(\hat{p})$를 약수량효과의 정의 (83)에 대입하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right) = \Delta \tag{86}$$

〈그림 1〉의 본원공간에서 $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$은 원점 $O=[0,0]$과 본원 종착점 $F(p)$를 연결한 직선의 기울기이고, $\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)$은 원점 $O=[0,0]$과 본원 중간점 $H(\hat{p})$를

연결한 직선의 기울기이며, Δ는 무차별곡선 $V(a)$의 중심 $O_V = [aV, (1-a)V]$과 무차별곡선 $Z(c)$의 중심 $O_Z = [cZ, (1-c)Z]$를 연결한 직선의 기울기이다. 따라서 식 (86)은 세 직선의 기울기 사이의 기하학적인 관계

$$[\, OF(p)\text{의 기울기} \,][\, OH(\hat{p})\text{의 기울기} \,] = [\, O_V O_Z\text{의 기울기} \,] \quad (87)$$

로 약수량효과를 정의하고 있다. 이 일반적인 정의를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\left.\frac{V_2}{V_1}\right|_F = \left.\frac{Z_1}{Z_2}\right|_H \Delta \quad (88)$$

무차별곡선 $Z(c)$가 무차별곡선 $V(a)$로 이동할 때 종착점 $F(p)$의 유통속도 비율은 중간점 $H(\hat{p})$의 유통속도 비율의 역수를 무차별곡선의 좌표축의 이동거리의 기울기 Δ만큼 이동한 것이다.

식 (84)는 쌍대 약수량효과를 나타내는 식 (7)의 $q = g(\hat{q})$의 함수 형태이다. 따라서 쌍대약수량효과는 기하학적으로는 쌍대공간에서 다음과 같다.

$$q\hat{q} = \frac{[\, O_k O_K\text{의 기울기} \,]^2}{[\, OO_k\text{의 기울기} \,][\, OO_K\text{의 기울기} \,]} \quad (89)$$

그러므로 쌍대약수량효과 $q\hat{q}$는 쌍대공간에서 삼각형 OO_kO_K의 세 변 사이의 관계를 정의하고 있다. 쌍대공간에서 식 (89)의 함수 형태는 본원공간에서 식 (83)과 동일하다.

경제가 쌍대출발점 $F(q_o)$의 기울기 q_o에서 출발하여 쌍대중간점 $H(\hat{q})$의 기울기 $\hat{q}$를 거쳐서 쌍대 종착점 $F(q)$의 기울기 q에 도달한다. 식 (89)는 이 가운데 경제가 쌍대공간에서 약수량효과에 의해 $\hat{q}$에서 q로 움직인 내용을 표현한 방정식으로서 쌍대 약수량효과의 정의이다. 이 때 (m, n, k, K)가 유일하면 q와 $\hat{q}$의 관계는 유일하며 따라서 쌍대약수량효과는 유일하다. 식 (89)에 의하면 q와 $\hat{q}$의 관계는 직각쌍곡선의 관계이고, 그 상수는 $\frac{m}{1-m}\frac{n}{1-n}\Omega^2$

이다. 즉, 식 (89)가 쌍대공간에서 약수량효과를 정의하는 추가적인 독립방정식 (7) $q = g(\hat{q})$의 정체이다. 〈그림 5〉의 2 상한의 점선이 식 (89)를 기하학적으로 묘사하고 있다.

식 (89)는 경제가 약수량효과에 따라 쌍대공간에서 쌍대 확장경로를 따라 이동할 때 기울기 $\hat{q}$에서 기울기 q로 변하는 관계를 나타낸다. 쌍대약수량효과의 기하학적 의미를 조사하기 위하여 식 $F(q)$와 식 $H(\hat{q})$을 식 (89)에 대입하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)\left(\frac{K_2}{K_1}\right) = \Omega \tag{90}$$

$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$은 원점 $O=[0,0]$과 쌍대 종착점 $F(q)$를 연결한 직선의 기울기이고, $\left(\frac{K_2}{K_1}\right)$은 원점 $O=[0,0]$과 점 본원 중간점 $H(\hat{q})$를 연결한 직선의 기울기이며, Ω는 〈그림 2〉의 쌍대공간에서 무차별곡선 $k(m)$의 중심 $O_k = [mk, (1-m)k]$과 무차별곡선 $K(n)$의 중심 $O_K = [nK, (1-n)K]$를 연결한 직선의 기울기이다. 그러므로 식 (90)은 세 직선의 기울기 사이의 기하학적 관계로 다음과 같이 약수량효과를 정의하고 있다.

$$[OF(q)\text{의 기울기}][OH(q_o)\text{의 기울기}] = [O_k O_K\text{의 기울기}] \tag{91}$$

한편 식 (90)을 재정리하면 다음과 같다.

$$\left.\frac{k_2}{k_1}\right|_F = \left.\frac{K_1}{K_2}\right|_H \Omega \tag{92}$$

무차별곡선 $K(n)$이 무차별곡선 $k(m)$으로 이동할 때 종착점 $F(q)$의 유통시간 비율은 중간점 $H(\hat{q})$의 유통시간 비율을 무차별곡선의 좌표축의 이동거리의 기울기 Ω만큼 이동한 것이다.

5. 본원공간과 쌍대공간 약수량효과의 동시 유일성

본원공간과 쌍대공간에서 따로 따로 증명한 약수량효과의 유일성을 양 공간에서 동시에 증명할 차례이다. 앞에서 우리는 본원의 V와 쌍대의 k 사이의 pq 부분수량효과 방정식 (26), 본원의 Z와 쌍대의 K 사이의 $\hat{p}\hat{q}$ 부분수량효과의 방정식 (27), 본원의 V와 본원의 사이에서 본원준수량효과의 방정식 (83), 쌍대의 k와 쌍대의 K 사이에서 쌍대약수량효과의 방정식 (84)을 구하였다. 이 내용을 행렬로 만들면 다음과 같이 요약된다.

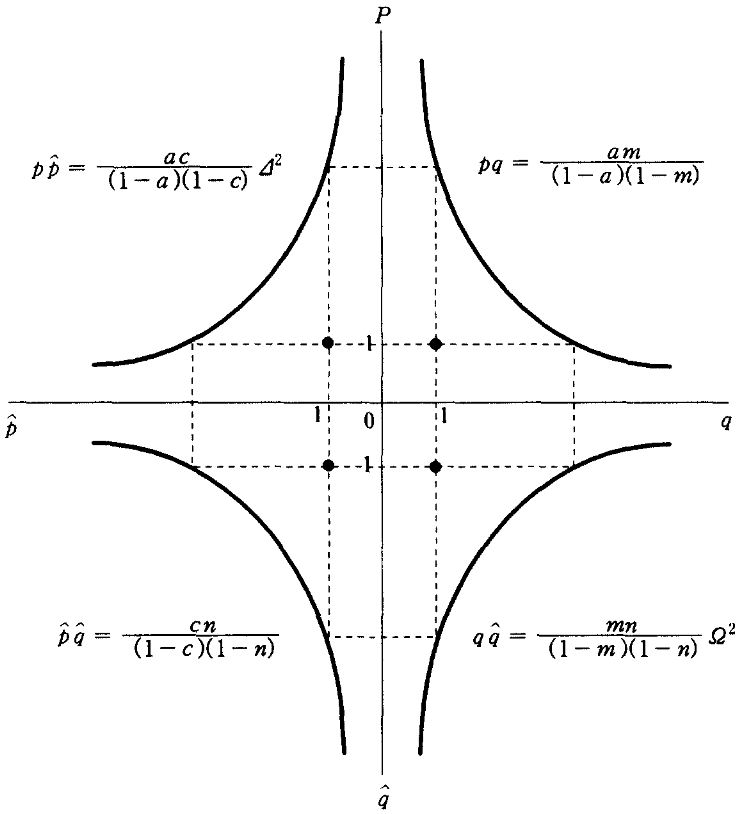
	본원공간 Z (1행)	쌍대공간 k (2행)
본원공간 V (1열)	본원약수량효과 $p\hat{p} = \frac{ac}{(1-a)(1-c)}\Delta^2$	pq 부분수량효과 $pq = \frac{am}{(1-a)(1-m)}$
쌍대공간 K (2열)	$\hat{p}\hat{q}$ 부분수량효과 $\hat{p}\hat{q} = \frac{cn}{(1-c)(1-n)}$	쌍대약수량효과 $q\hat{q} = \frac{mn}{(1-m)(1-n)}\Omega^2$

〈그림 8〉은 공통의 원점을 중심으로 네 개의 그림을 합성한 것이다. 1 상한에는 〈그림 4〉이면서 행렬 (1, 2)의 pq 부분수량효과 방정식 (26)을, 3 상한에는 〈그림 5〉의 $\hat{p}\hat{q}$ 부분수량효과 방정식 (27)을 재생한 것이다. 2 상한에는 행렬 (1, 1)의 본원약수량효과의 방정식 (83)이, 4 상한에는 행렬 (2, 2)의 쌍대약수량효과의 방정식 (84)가 추가되었다. 모든 상한에서 45도선은 자명한 풀이이므로 배제된다. 또한 모든 상한에서 좌표 (1, 1) 역시 배제된다.

네 개의 식은 원점을 중심으로 좌표가 일치하여야 한다. 이 가운데 식 (83)과 (84)로부터 다음을 얻는다.

$$p\hat{p}q\hat{q} = \frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\frac{m}{1-m}\frac{n}{1-n}\Delta^2\Omega^2 \tag{93}$$

〈그림 8〉



이것은 2 상한과 4 상한의 직각쌍곡선을 곱한 결과이다. 이 결과를 식 (79)와 비교하면 다음과 같다.

$$\Delta\Omega = 1 \tag{94}$$

이것이 본원/쌍대공간의 양 공간에서 준수량효과의 동시유일성(co-uniqueness)의 조건이다. 식 (94)는 양 공간에서 동시준수량효과의 정의이다.

동시 준수량효과의 정의식 (94)의 기하학적 의미는 본원공간의 직선 $O_V O_Z$의 기울기와 쌍대공간의 직선 $O_k O_K$의 기울기의 곱이 1이 된다는 것이다. 본원공간과 쌍대공간에서 무차별곡선이 이동할 때 본원공간 축의 이동거리의 기

울기는 쌍대공간 축의 이동거리의 기울기의 역수이다. 양 공간에서 좌표축의 이동 사이의 관계를 나타낸다. 즉, 식 (94)는 기하학적으로 다음과 같다.

$$[O_V O_Z \text{의 기울기}][O_k O_K \text{의 기울기}] = 1 \tag{95}$$

식 (95)에 의하면 본원공간의 좌표축의 이동거리의 기울기 $\varDelta$는 쌍대공간의 좌표축의 이동거리의 기울기의 역수 $\frac{1}{\varOmega}$이다. 본원공간과 쌍대공간 사이에서 $Vk=1$이나 $ZK=1$처럼 역관계가 되는 또 하나의 예이다. (a, c, V, Z)가 유일하면 $O_V O_Z$의 기울기와 $O_k O_K$의 기울기는 유일하게 결정되므로 공통 약수량효과는 유일하다.

6. 약수량효과와 약대체효과의 정의

이제 우리는 지금까지 논의를 종합하여 약수량효과와 약대체효과를 다음과 같이 정의할 수 있다.

약수량효과 : 본원공간과 쌍대공간에서 동시에 다음의 두 가지 조건

$$R(p\hat{p}) \qquad \left(\frac{V_2}{V_1}\right)\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right) = \varDelta \text{ 혹은 } p\hat{p} = \frac{a}{1-a}\frac{c}{1-c}\varDelta^2 \tag{96}$$

$$R(q\hat{q}) \qquad \left(\frac{k_2}{k_1}\right)\left(\frac{K_2}{K_1}\right) = \varOmega \text{ 혹은 } q\hat{q} = \frac{m}{1-m}\frac{n}{1-n}\varOmega^2 \tag{97}$$

을 만족시키는 경제의 이동현상이다. 여기서 $R(p\hat{p})$는 본원공간에서 약수량효과를 표기하고, $R(q\hat{q})$는 쌍대공간에서 약수량효과를 표기한다. 또는 약수량효과는 본원공간과 쌍대공간에서

$$\varDelta\varOmega = 1$$

혹은

$$\left(\frac{(1-c)Z-(1-a)V}{aV-cZ}\right)\left(\frac{(1-n)V-(1-m)Z}{mZ-nV}\right) = 1 \qquad (98)$$

을 만족시키는 경제의 이동현상으로 정의할 수 있다.

약수량효과의 정의 (96)~(97)이 수량효과의 일반적 정의인 것을 확인할 수 있는 간접적인 방법은 특수하게 $p = \hat{p}$와 $q = \hat{q}$의 경우 강수량효과 불가능성의 결과와 일치하는 것을 점검하는 일이다. 증명은 생략한다.

VII. 맺 는 말

본 논문은 김학은[1]의 결과에서 출발하였고, 김학은[3]의 약수량효과를 강수량효과 불가능성을 이용하여 재확인하였다. 약수량효과가 유도되면 유통속도의 분할은 김학은[3]이 보여준 대로 기계적이다. 이것은 거시적 변수를 미시적 변수로 분할이 가능함을 최초로 보인 예에 불과하다. 이 가능성은 유통속도의 양면성에 의존하였다. 단위 시간의 유통속도는 단위 회전의 유통시간이라는 쌍대성을 갖고 있다. 이 양면성은 기묘하게도 본원문제에서 나타나는 유통속도의 특성이 쌍대문제에서 유통시간의 다른 특성으로 나타난다.

앞서의 논문과 달리 이 논문에서 밝혀진 새로운 사실은 수량효과의 불가능정리와 확장경로 불가능 현상의 발견이다. 그러므로 동일 현상을 나타내는데 있어서 본원공간과 쌍대공간은 서로 다른 매개체 역할을 한다고 볼 수 있다. 같은 현상이 다른 매개체를 통과할 때 굴절현상을 일으키듯이 유통속도 역시 본원공간에서 굴절현상을 보이든가 쌍대공간에서 굴절현상을 보인다. 굴절현상을 보이는 위치에 굴절곡선과 분할곡선이 존재한다. 이 굴절곡선과 분할곡선이 유통속도를 분할하는 중요한 역할을 한다.

▣ 참 고 문 헌 ▣

1. 김학은, "유통속도의 부문별 분할 I", 『연세경제연구』, 제V권 제2호, 1998 가을, 1998, pp. 101~128.
2. ______, 『화폐의 유통속도의 분할 : 이론과 실제』, 한국은행 연구보고서, 1998b.
3. ______, "화폐유통속도의 수학적 분할", 『경제학연구』, 49, 2001, pp. 273~303.
4. Samuelson, P., *Foundations of Economic Analysis*, NY : Atheneum, 1945.